

In dieser Vertiefung wird das „einfache“ p-g-System aus dem Buch Lösungswege 8 auf S. 121 erweitert. Die Idee dafür stammt aus dem Buch „Gödel, Escher, Bach“ von Douglas R. Hofstadter.

Das erweiterte p-g-System

definierte Symbole: **p, g, –**

Axiome:

Jede Symbol-Anordnung der Form „x **p – g** x –“ ist ein Axiom, wenn x für eine bestimmte Anzahl von Bindestrichen steht.

Ableitungsregel:

Wenn x **p y g** z ein Satz ist, dann ist auch x **p y– g z–** ein Satz. x, y und z stehen für Ketten, die nur aus Bindestrichen besteht.

Aufgaben:

- a) Entscheide, ob – – – **p** – – **g** – – – – – ein Satz ist.
- b) Entscheide, ob – – **p** – – – – – **g** – – – – – – – ein Satz ist.
- c) Entscheide, ob – **p** – – – – – **g** – – – – – ein Satz ist.
- d) Finde eine Interpretation für die Symbole **p, g, –**, sodass alle Sätze eine Bedeutung bekommen.

Die Lösungen findest du auf der nächsten Seite.

Lösungen der Aufgaben:

a) Anordnungen der Form „ $x \text{ p } - \text{ g } x$ –“ sind Axiome.

Wir wählen für x die Bindestrichkette „ $- - -$ “.

Also ist „ $- - - \text{ p } - \text{ g } - - -$ –“ ein Axiom.

Durch Anwendung der Ableitungsregel erhält man den Satz „ $- - - \text{ p } - - \text{ g } - - - - -$ –“

b) Anordnungen der Form „ $x \text{ p } - \text{ g } x$ –“ sind Axiome.

Wir wählen für x die Bindestreichkette „ $- -$ “.

Also ist „ $- - \text{ p } - \text{ g } - - -$ –“ ein Axiom.

Durch Anwendung der Ableitungsregel erhält man den Satz „ $- - \text{ p } - - \text{ g } - - - - -$ –“

Durch nochmaliges Anwenden der Ableitungsregel erhält man den Satz „ $- - \text{ p } - - - \text{ g } - - - - -$ –“

Durch nochmaliges Anwenden der Ableitungsregel erhält man den Satz „ $- - \text{ p } - - - - \text{ g } - - - - -$ – –“

c) Anordnungen der Form „ $x \text{ p } - \text{ g } x$ –“ sind Axiome.

Wir wählen für x die Bindestreichkette „ $-$ “.

Also ist „ $- \text{ p } - \text{ g } - -$ –“ ein Axiom.

Durch Anwendung der Ableitungsregel erhält man den Satz „ $- \text{ p } - - \text{ g } - - -$ –“

Durch nochmaliges Anwenden der Ableitungsregel erhält man den Satz „ $- \text{ p } - - - \text{ g } - - - -$ –“

Durch nochmaliges Anwenden der Ableitungsregel erhält man den Satz „ $- \text{ p } - - - - \text{ g } - - - - -$ –“

Der gegebene Satz ist nicht ableitbar.

Begründung:

Da die Ableitungsregeln immer nur die zweite und die dritte Bindestrichkette verlängern, muss man mit dem Axiom

„ $- \text{ p } - \text{ g } - -$ –“ beginnen. Die Ableitungsregeln führen immer nur zu einer Verlängerung der zweiten und dritten Bindestrichkette. Zweimaliges Anwenden der Ableitungsregel führt zum Satz „ $- \text{ p } - - - \text{ g } - - - -$ – – – – –“, also kann der gegebene Satz nicht abgeleitet werden.

d) erste Interpretation:

p = plus; g = ist gleich; die Bindestrichketten werden als Anzahl interpretiert (z.B. „ $- - -$ “ = 3)

Der Satz aus a) lautet interpretiert: „3 plus 2 ist gleich 5“

zweite Interpretation:

p = ist gleich; g = weggenommen von; die Bindestrichketten werden als Anzahl interpretiert (z.B. „ $- - -$ “ = 3)

Der Satz aus a) lautet interpretiert: „3 ist gleich 2 weggenommen von 5“

