2 GRUNDBEGRIFFE DER DIFFERENTIALRECHNUNG

W 2.01 Wie ist die mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ definiert?

W 2.02 Wie ist die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t definiert?

W 2.03 Wie ist der Differenzenquotient einer Funktion f in einem Intervall $[a; b]$ definiert?

W 2.04 Wie ist der Differentialquotient einer Funktion f an einer Stelle x definiert?

W 2.05 Wie kann man einen Differenzenquotienten einer Funktion f in einem Intervall $[a; b]$ noch bezeichnen?

W 2.06 Wie kann man einen Differentialquotienten einer Funktion f an einer Stelle x noch bezeichnen?

W 2.07 Was sagt das Vorzeichen des Differenzenquotienten aus?

W 2.08 Nenne außermathematische Beispiele für mittlere Änderungsraten bzw. Änderungsraten an einer Stelle!

W 2.09 Gib einen Funktionstyp an, bei dem der Differenzenquotient in jedem Intervall den gleichen Wert hat! Begründe!

W 2.10 Gib einen Funktionstyp an, bei dem der Differentialquotient an jeder Stelle den gleichen Wert hat! Begründe!

W 2.11 Bei welchen Funktionen hat der Differenzenquotient in jedem Intervall das gleiche Vorzeichen? Begründe!

W 2.12 Was versteht man unter einer Sekantenfunktion? Wie hängt ein Differenzenquotient mit einer Sekantenfunktion zusammen?

W 2.13 Wie ist eine Tangente an einen Funktionsgraphen definiert?

W 2.14 Was versteht man unter dem Neigungswinkel (Steigungswinkel) einer Geraden?

W 2.15 Wie kann man das Maß des Neigungswinkels einer Tangente an einen Funktionsgraphen ermitteln?

W 2.16 Wie ist eine Polynomfunktion definiert? Aus welchen „Grundfunktionen“ ist sie aufgebaut?

W 2.17 Was versteht man unter der ersten, zweiten bzw. dritten Ableitung einer Funktion? Erläutere dies am Beispiel der Funktion $f: x \mapsto x^4 - x^2$!

W 2.01 Bewegt sich ein Körper gemäß der Zeit-Ort-Funktion s: $t \mapsto s(t)$, dann setzt man:
mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2] = \bar{v}(t_1; t_2) = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$

W 2.02 Bewegt sich ein Körper gemäß der Zeit-Ort-Funktion s: $t \mapsto s(t)$, dann setzt man:
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = v(t) = \lim\limits_{z \to t} \bar{v}(t; z) = \lim\limits_{z \to t} \frac{s(z)-s(t)}{z-t}$

W 2.03 Es sei f: $A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $[a; b] \subseteq A$. Die Zahl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ heißt Differenzenquotient von f in [a; b].

W 2.04 Es sei f: $A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Der Grenzwert $f'(x) = \lim\limits_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ heißt Differentialquotient von f an der Stelle x.

W 2.05 Man kann ihn als mittlere Änderungsrate von f in [a; b] bezeichnen.

W 2.06 Man kann ihn als Änderungsrate von f an der Stelle x bezeichnen.

W 2.07 Es sei f eine reelle Funktion und [a; b] ein Intervall, dann gilt $b - a > 0$ und somit:
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0 \iff$ f steigt im „Endeffekt" in [a; b] (muss aber in [a; b] nicht monoton steigend sein).
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0 \iff$ f fällt im „Endeffekt" in [a; b] (muss aber in [a; b] nicht monoton fallend sein).
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff$ f ist im „Endeffekt" in [a; b] weder steigend noch fallend (muss aber in [a; b] nicht konstant sein).

W 2.08 ZB:
- mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall bzw. Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt
- mittlere Flächenzunahmegeschwindigkeit einer kreisförmigen Welle in einem Zeitintervall bzw. Flächenzunahmegeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt
- mittlere Änderungsrate der Fliehkraft in einem Radiusintervall bzw. Änderungsrate der Fliehkraft bei einem Radius

W 2.09 lineare Funktion, da für f mit $f(x) = k \cdot x + d$ in jedem Intervall [x; z] der Differenzenquotient $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{k \cdot z + d - k \cdot x - d}{z-x} = \frac{k \cdot (z-x)}{z-x} = k$ ist

W 2.10 lineare Funktion, da für f mit $f(x) = k \cdot x + d$ an jeder Stelle x der Differentialquotient $\lim\limits_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = k$ ist

W 2.11 Bei Funktionen, die streng monoton steigend bzw. fallend sind, hat der Differenzenquotient das gleiche Vorzeichen, da er in jedem Intervall gleich der Steigung k bzw. gleich der Steigung der entsprechenden Sekantenfunktion ist.

W 2.12 Ist f eine Funktion in [a; b] , so nennt man die lineare Funktion s mit $s(a) = f(a)$ und $s(b) = f(b)$ die Sekantenfunktion von f in [a; b].
Der Differenzenquotient einer Funktion f in [a; b] ist gleich der Steigung der Sekantenfunktion von f in [a; b].

W 2.13 Es sei f eine reelle Funktion und $f'(x)$ ihr Differentialquotient an der Stelle x. Die Gerade durch den Punkt $X = (x \mid f(x))$ mit der Steigung $f'(x)$ bezeichnet man als Tangente an den Graphen von f im Punkt X.

W 2.14 Unter dem Neigungswinkel (Steigungswinkel) einer Geraden g versteht man den Winkel, den die Gerade g mit der positiven 1. Achse (x-Achse) einschließt. Für das Maß α des Neigungswinkels gilt stets $0° \leq \alpha < 180°$.

W 2.15 Man setzt $f'(x) = \tan \alpha$ und berechnet daraus α.

W 2.16 Eine Polynomfunktion kann als „Summe" von Potenzfunktionen der Form $p_n(x) = c \cdot x^n$ aufgefasst werden, zB:
$f(x) = p_3(x) + p_2(x) + p_1(x) + p_0(x)$.

W 2.17 Es sei f eine reelle Funktion. Man bezeichnet die Funktion f' als erste Ableitung von f, die Funktion $f'' = (f')'$ als zweite Ableitung von f und die Funktion $f''' = (f'')'$ als dritte Ableitung von f.
$f': x \mapsto 4x^3 - 2x$; $f'': x \mapsto 12x^2 - 2$; $f''': x \mapsto 24x$