



HISTORISCHES ZU MENGEN

Erste Ideen zur Mengenlehre finden sich schon früh. Hervorzuheben ist **Bernhard Bolzano** (1781–1848), der sich schon intensiv mit unendlichen Mengen beschäftigte. Als eigentlicher Begründer der modernen Mengenlehre gilt jedoch **Georg Cantor** (1845–1918), der eine Menge als „Zusammenfassung von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten zu einem Ganzen“ beschrieb.

In der nachfolgenden Zeit wurde die Mengenlehre zu einer umfassenden mathematischen Disziplin ausgebaut. Diese wurde zunächst von vielen Mathematikern abgelehnt, vor allem weil es Probleme mit unendlichen Mengen gab. Ein Streitpunkt war zB die Frage, ob es die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gibt. Seit **Aristoteles** war man zwar überzeugt, dass man im Prinzip beliebig weit zählen könne, aber die Menge **aller** natürlichen Zahlen nicht als fertiges Ganzes denken könne, wie es **Cantor** behauptete. (Im ersten Fall spricht man vom „Potentiell-Unendlichen“ im zweiten Fall vom „Aktual-Unendlichen“.) Vor allem **Leopold Kronecker** (1823–1891) vertrat diesen Standpunkt.

Auf der anderen Seite schrieb der bedeutende Mathematiker **David Hilbert** (1862–1943): „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.“

Die große Bedeutung der Mengenlehre für die moderne Mathematik hat zwei Gründe. Erstens stellt sie eine **Sprache** zur Verfügung (einschließlich verschiedener Zeichen wie $\neg, \wedge, \vee, \in, \notin, \cap, \cup, \setminus, \subseteq, \subset, \dots$), die sich in fast allen Gebieten der Mathematik als nützlich erwiesen hat. Zweitens stellt sie **fundamentale Begriffe** zur Verfügung, mit deren Hilfe sich viele mathematische Begriffe genauer erklären lassen. (ZB: Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt einen festen Abstand haben.) Außerdem lassen sich in der Sprache der Mengenlehre mathematische **Beweise** exakter führen.

Bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts hat sich gezeigt, dass man fast die gesamte Mathematik auf mengentheoretische Grundlagen zurückführen kann. Maßgeblich daran beteiligt war die Gruppe **Bourbaki** (ein Fantasienamen für eine Gruppe französischer und kanadischer Mathematiker).



Bernhard Bolzano
(1781–1848)



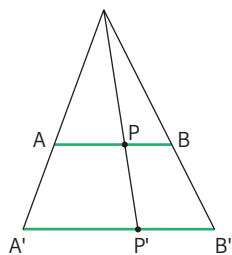
Georg Cantor
(1845–1918)

Paradoxien bei unendlichen Mengen

Unendliche Mengen haben merkwürdige Eigenschaften. Auf eine Merkwürdigkeit wies schon **Galileo Galilei** (1564–1642) hin. Die Menge der Quadratzahlen ist eine echte Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen und müsste daher „weniger“ Elemente enthalten als die letzte. Auf der anderen Seite gibt es „gleich viele“

Quadratzahlen wie natürliche Zahlen, was man sofort einsieht, wenn man diese Zahlen untereinander schreibt:

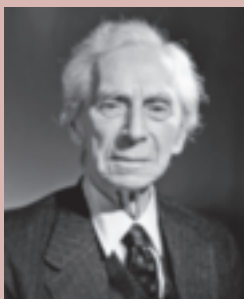
1	2	3	4	5	...
↕	↕	↕	↕	↕	
1	4	9	16	25	...



In ähnlicher Weise kann man anhand von nebenstehender Abbildung argumentieren, dass die Strecke AB kürzer ist als die Strecke A'B' und daher „weniger“ Punkte als die Strecke A'B' enthalten müsste. Auf der anderen Seite kann man der Abbildung entnehmen, dass jedem Punkt P der Strecke AB genau ein Punkt P' der Strecke A'B' entspricht und umgekehrt; somit enthalten die beiden Strecken „gleich viele“ Punkte. Diese Beispiele zeigen, dass gewisse sprachliche Ausdrücke wie „gleich viel“ oder „weniger“, die bei endlichen Mengen sinnvoll sind, bei unendlichen Mengen keinen Sinn mehr ergeben.

Ein amüsantes Gedankenspiel stellt das **Hilbert'sche Hotel** dar. Dieses Hotel besitzt unendlich viele Zimmer, die die Nummern 1, 2, 3, 4, 5, ... tragen. Das Hotel ist voll besetzt. Plötzlich kommt ein neuer Gast. Was tun? Ganz einfach: Jeder Gast rückt um ein Zimmer weiter und schon ist das erste Zimmer frei. Am nächsten Tag kommen zwei weitere Gäste. Kein Problem: Jeder Gast rückt um zwei Zimmer weiter und schon sind die ersten beiden Zimmer frei. Am dritten Tag warten – oh Schreck – unendlich viele Gäste in einer Schlange vor dem Hotel. Auch kein Problem: Jeder Gast rückt vom Zimmer mit der Nummer n auf das Zimmer mit der Nummer 2n und schon sind die unendlich vielen Zimmer mit ungeraden Nummern frei.

Antinomien der Mengenlehre



Bertrand Russell
(1872–1970)



David Hilbert
(1862–1943)

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts tauchten in der Mengenlehre schwerwiegende Widersprüche (Antinomien) auf, die die Mathematik in ihren Fundamenten erschütterten. Eine der bekanntesten Antinomien ist die folgende Antinomie von **Bertrand Russell**:

Es sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

Symbolisch: $M = \{X \mid X \notin X\}$

Frage: Enthält M sich selbst als Element oder nicht? Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $M \in M$. Dann ist die Bedingung $X \notin X$ für die Menge M nicht erfüllt und laut Definition von M gilt somit $M \notin M$.

2. Fall: $M \notin M$. Dann ist die Bedingung $X \notin X$ für die Menge M erfüllt und laut Definition von M gilt somit $M \in M$.

Wir sehen: In jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch.

Eine humorvolle Einkleidung dieser Antinomie ist die folgende: Ein Barbier rasiert alle Barbier, die sich nicht selbst rasieren. Frage: Rasiert er sich selbst oder nicht? Man kann ähnlich wie vorhin zeigen, dass sich stets ein Widerspruch ergibt.

Diese Antinomie zeigt, dass man Mengen nicht in beliebiger Weise definieren darf und dass man beschreibende Bedingungen wie $X \notin X$ oder Ähnliches nicht zulassen darf. Durch entsprechende Einschränkungen der Mengenbildung konnte man derartige Antinomien vermeiden. Auch mit anderen Antinomien ist man auf ähnliche Weise fertig geworden. Bislang sind keine Antinomien aufgetaucht, die nicht irgendwie bereinigt werden konnten. Ein Beweis, dass die Mengenlehre widerspruchsfrei ist, wurde aber bis heute nicht gefunden (und ist in strenger Form auch gar nicht möglich).

