Lösungen Kapitel Energie

1 Mechanische Energie und Arbeit, S. 85

Teste dein Wissen 1:

Was versteht man in der Physik unter Arbeit? Kreuze die richtige Antwort an.
a) Kraft mal zurückgelegter Weg
b) Kraft mal zurückgelegter Weg in Richtung der Kraft
c) Kraft normal zur Richtung des Weges mal zurückgelegter Weg

Antwort:
In der Physik versteht man unter der (mechanischen) Arbeit $\boldsymbol{W}$ das Produkt aus der aufgewendeten Kraft $\boldsymbol{F_A}$, die auf einen Körper wirkt, und dem Weg $\vec{\boldsymbol{s}}$, den der Körper in Richtung der Kraft zurücklegt.

$$\boldsymbol{W = F_A \cdot s = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

Die korrekte Definition beinhaltet somit, dass die Kraft in Richtung des Weges wirken muss.
Daher ist die richtige Antwort:
b) Kraft mal zurückgelegter Weg in Richtung der Kraft
Arbeit wird geleistet, wenn eine Kraft einen Körper entlang eines Weges verschiebt, und nur der Anteil der Kraft, der in Richtung des Weges wirkt, trägt zur Arbeit bei. Kraftkomponenten, die normal (senkrecht) zur Bewegungsrichtung stehen, leisten keine Arbeit am Körper.

Teste dein Wissen 2:

Erläutere, ob das ruhige Halten einer Last oder das Tragen einer Last auf ebener Straße Arbeit ist.

Antwort:
Nein, in beiden Fällen wird nach der physikalischen Definition keine Arbeit verrichtet.

Ruhiges Halten einer Last: Beim ruhigen Halten einer Last wendet man eine Kraft auf, die der Schwerkraft entgegenwirkt, um die Last in der gleichen Position zu halten. Da jedoch keine Bewegung in Richtung der angewendeten Kraft stattfindet (der zurückgelegte Weg ist null), wird nach der physikalischen Definition keine Arbeit verrichtet.

Tragen einer Last auf ebener Straße: Beim Tragen einer Last auf ebener Straße wendet man ebenfalls eine Kraft auf, um die Last gegen die Schwerkraft zu stützen. Die Bewegung erfolgt jedoch horizontal und nicht in Richtung der angewendeten vertikalen Kraft. Da die Kraft und die Bewegung senkrecht zueinanderstehen, ist der Weg in Richtung der Kraft wiederum null. Deshalb wird auch in diesem Fall keine Arbeit im physikalischen Sinne verrichtet.

Arbeit im menschlichen Körper:
Wenn man den Menschen (menschlichen Körper) jedoch als Teil des Systems betrachtet, dann wird in den Muskeln beim Tragen/Halten der Last Energie umgesetzt, damit die erschlafften Muskelfasern wieder gestrafft bzw. aktiviert werden. Eine dafür notwendige chemische Energie wird dabei zuerst in eine entsprechende mechanische Energie (Muskelkontraktion/-Spannung, als Wirkung entgegen der Gewichtskraft der Last) und schließlich in Wärme umgewandelt.

Teste dein Wissen 3:

Du dehnst einen Expander 20-mal hintereinander um 1 m. Dabei benötigst du jeweils eine mittlere Kraft von 200 N. Bestimme die Größe der verrichteten Arbeit.

a) 8 000 J
b) keine Arbeit
c) 4 000 J

Antwort:

Um die verrichtete Arbeit zu bestimmen, wenn ein Expander um 1 m gedehnt wird, verwenden wir die Formel für die Arbeit:

$$\boldsymbol{W = F_A \cdot s}$$

($\boldsymbol{F_A}$... aufgewendete Kraft (in Richtung des Weges), $\boldsymbol{s}$... zurückgelegter Weg)

In diesem Fall beträgt die Kraft $F_A = 200\ \mathrm{N}$, und der Weg $s = 1\ \mathrm{m}$ pro Dehnung.
Da der Expander 20-mal gedehnt wird, muss die berechnete Arbeit mit der Anzahl der Wiederholungen multipliziert werden:

$$\boldsymbol{W_{gesamt} = 20 \cdot F_A \cdot s} = 20 \cdot 200\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m} = \mathbf{4\,000\ J}$$

Die Größe der verrichteten Arbeit beim 20-maligen Dehnen des Expanders um 1 m mit einer mittleren Kraft von 200 N beträgt 4 000 J.

Teste dein Wissen 4:

Yasin lässt einen Ball auf den Boden fallen, danach lässt Alex ihn aus der doppelten Höhe fallen. Wie groß ist die kinetische Energie im zweiten Fall beim Aufprall auf dem Boden?
Wähle die richtige Antwort aus.

a) halb so groß wie beim ersten Fall
b) gleich groß
c) doppelt so groß
d) 4-mal so groß

Antwort:

Die potenzielle Energie (Energie der Lage) des Balls vor dem Fall ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{E_p = m \cdot g \cdot h}$$

($\boldsymbol{g}$... Erdbeschleunigung (9,81m/s^2), $\boldsymbol{m}$... Masse des Balls, $\boldsymbol{h}$... Fallhöhe)

Wenn Alex den Ball aus der *doppelten* Höhe fallen lässt, *verdoppelt* sich somit auch die potenzielle Energie im Vergleich zu Yasins Fall, während die Masse m und die Erdbeschleunigung g konstant bleiben.
Diese wird während des Falls in kinetische Energie (Energie der Bewegung) umgewandelt:

$$\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

($\boldsymbol{v}$... Momentangeschwindigkeit)

Die Verdopplung der Fallhöhe (und damit der potenziellen Energie) führt daher auch zu einer Verdopplung der kinetischen Energie beim Aufprall.
Daher ist c) richtig. Die kinetische Energie ist im zweiten Fall beim Aufprall auf dem Boden doppelt so groß.

Teste dein Wissen 5:

Bestimme das Verhältnis der Energie E_1, die man für die Beschleunigung eines PKW von 0 auf 60 km/h benötigt, zur Energie E_2, die zur Beschleunigung von 60 auf 120 km/h notwendig ist.

a) $E_1 : E_2 = 1 : 1$
b) $E_1 : E_2 = 1 : 2$
c) $E_1 : E_2 = 1 : 3$
d) $E_1 : E_2 = 1 : 4$

Antwort:

Um das Verhältnis der benötigten Energie für die zwei unterschiedlichen Beschleunigungsphasen eines PKW zu bestimmen, betrachten wir die kinetische Energie:

$$\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

($\boldsymbol{m}$... Masse des PKW, $\boldsymbol{v}$... Geschwindigkeit des PKW)

Die Energie, die zur Beschleunigung eines Fahrzeugs benötigt wird, entspricht der Änderung seiner kinetischen Energie.

Normalerweise sollte man die Geschwindigkeiten zuerst von km/h in m/s umgerechnen, da die kinetische Energie in SI-Einheiten berechnet wird.
Da allerdings nach dem Verhältnis gefragt wird, heben sich die Einheiten gegenseitig auf und weiters sind Verhältnisse invariant (ändern sich nicht) zur gewählten Einheit/Größe.

Für $\boldsymbol{E_1}$ (von 0 auf 60 km/h):

$$E_1 = \frac{1}{2} m \cdot \left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2$$

Für E_2 (von 60 auf 120 km/h):

Die Energie E_2 ist die Differenz der kinetischen Energie bei 120 km/h und bei 60 km/h:

$$E_2 = \frac{1}{2} m \cdot \left(120 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 - \frac{1}{2} \text{m} \cdot \left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 = \frac{m}{2} \cdot [\left(120 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 - \left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2]$$

Nun setzen wir die Ausdrücke für E_1 und E_2 in das Verhältnis $E_1 : E_2$ ein und vereinfachen:

$$\boldsymbol{E_1 : E_2} = \frac{\frac{m}{2} \cdot (60\ \text{km/h})^2}{\frac{m}{2} \cdot [(120\ \text{km/h})^2 - (60\ \text{km/h})^2]} = \frac{3\,600\ \text{km}^2/\text{h}^2}{10\,800\ \text{km}^2/\text{h}^2} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

Das Verhältnis der Energie $\boldsymbol{E_1}$, die man für die Beschleunigung eines PKW von 0 auf 60 km/h benötigt, zur Energie $\boldsymbol{E_2}$, die zur Beschleunigung von 60 auf 120 km/h notwendig ist, beträgt etwa **1 : 3**. Dies bedeutet, dass die Energie, die benötigt wird, um ein Fahrzeug von 60 auf 120 km/h zu beschleunigen, dreimal so groß ist wie die Energie, die benötigt wird, um es von 0 auf 60 km/h zu beschleunigen.

Die richtige Antwort ist daher:

c) $\boldsymbol{E_1 : E_2 = 1 : 3}$

Teste dein Wissen 6:

Energie wird niemals „erzeugt“, sie wird nur umgewandelt. Woher kommt dann die ursprüngliche Energie? Kreuze die richtige Antwort an.

a) Vom Urknall, bei dem das Universum entstanden ist.
b) Das hängt vom betrachteten System ab.
c) Das lässt sich nicht beantworten.

Antwort:
Wenn wir den gesamten Kosmos als isoliertes/geschlossenes System betrachten, dann ist a) **Vom Urknall, bei dem das Universum entstanden ist, richtig.**

Diese Antwort reflektiert die vorherrschende Theorie in der Kosmologie. Der Urknall gilt als der Ursprung des Universums, aus dem alle Materie, Energie, Raum und Zeit hervorgegangen sind. Gemäß dieser Theorie war der Urknall der Anfangspunkt, von dem aus sich das gesamte Universum entwickelt hat, einschließlich aller Energieformen, sie sich in diesem befinden. Die Energieerhaltung, ein fundamentales Prinzip der Physik, besagt, dass Energie in einem isolierten bzw. geschlossenen System weder erzeugt noch vernichtet, sondern nur von einer Form in eine andere umgewandelt werden kann. Die gesamte Energie, die wir im Universum beobachten, stammt in irgendeiner Form vom Urknall.

Rechenaufgabe 1:
Der Hochsprungweltrekord von Javier Sotomayor (1,93 m groß, m = 80 kg) liegt seit 1993 bei 2,45 m. Der Sportler muss seinen Schwerpunkt, der etwa in halber Körperhöhe lokalisiert ist (96 cm über dem Erdboden), beim sogenannten Fosbury-Flop bis knapp unter die Lattenhöhe heben. Bestimme die Hubarbeit, die er bei seinem Rekordsprung verrichtete.

Antwort:
Die Hubarbeit $\boldsymbol{W}$ kann wegen der Erhöhung der potenziellen Energie (Energie der Lage) $\boldsymbol{E_p}$ mit folgender Formel berechnet werden:

$$\boldsymbol{W = E_p \; = \; m \cdot g \cdot h}$$

($\boldsymbol{m}$... Masse des Sportlers, $\boldsymbol{g}$...die Erdbeschleunigung (ca. 9,81 m/s^2),
$\boldsymbol{h}$... Erhöhung des Körperschwerpunkts zur Lattenhöhe)

Folgt für die Höhe: $h = 2{,}45 \text{ m} - 0{,}96 \text{ m} = 1{,}49 \text{ m}$
Wir setzen die entsprechenden Werte ein:

$$\boldsymbol{W} = \; 80 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \; \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}49 \text{ m} \approx \mathbf{1\,169\;J}$$

Javier Sotomayor verrichtete bei seinem Rekordsprung eine Hubarbeit von etwa 1 169 Joule.

Rechenaufgabe 2:
Wie groß ist die Arbeit einer Pumpe, die 1 000 m^3 Wasser 400 m hoch befördert?
Berechne die Arbeit und gib das Ergebnis in J und in kWh an.

Antwort:
Um die Hubarbeit zu berechnen, welche benötigt wird um 1 000 m^3 Wasser auf 400 m Höhe zu befördern, benutzen wir folgende Formel:

$$\boldsymbol{W = E_p \; = \; m \cdot g \cdot h}$$

($\boldsymbol{m}$... Masse von 1 000 m^3 Wasser, $\boldsymbol{g}$...die Erdbeschleunigung (ca. 9,81 m/s^2),
$\boldsymbol{h}$...Beförderungshöhe)

Zuerst berechnen wir die Masse des Wassers:

$$1 \text{ m}^3 \text{ H2O } \approx \; 1000 \text{ kg} \rightarrow 1000 \text{ m}^3 \text{ H2O} \approx 10^6 \text{ kg}$$

Wir setzen in die obige Formel ein:

$$\boldsymbol{W} = \; 10^6 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \; \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 400 \text{ m} = \mathbf{3,924 \cdot 10^9\;J = 1\,090\;kWh}$$

Die benötigte Arbeit der Pumpe beträgt somit 1 090 Kilowattstunden.

Rechenaufgabe 3:

Ein Auto (m = 1 800 kg) wird von 50 km/h auf 100 km/h beschleunigt. Ermittle die Beschleunigungsarbeit, die der Motor aufbringen muss. Die Reibung musst du hier nicht berücksichtigen!

Antwort:

Die Beschleunigungsarbeit $\boldsymbol{W}$ kann wegen der Erhöhung der kinetischen Energie (Energie der Bewegung) $\boldsymbol{E_k}$ mit folgender Formel berechnet werden:

$$\boldsymbol{W} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{v}_{\textbf{final}}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{v}_{\textbf{initial}}^{\mathbf{2}})$$

($\boldsymbol{m}$ ... Masse des Autos, $\boldsymbol{v_{final}}$... Endgeschwindigkeit, $\boldsymbol{v_{inital}}$... Anfangsgeschwindigkeit)

Zuerst rechnen wir die Geschwindigkeiten in m/s um:

$$v_{initial} = \left(\frac{50}{3{,}6}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 13{,}89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_{final} = 2 \cdot v_{initial} \approx 27{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Wir setzen die entsprechenden Werte ein:

$$\boldsymbol{W} = \frac{1\,800\ kg}{2} \cdot \left(\left(27{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{\mathbf{2}} - \left(13{,}89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{\mathbf{2}}\right) \approx \mathbf{521\ 000\ J} \approx \mathbf{0{,}145\ kWh}$$

Die nötige aufzubringende Beschleunigungsarbeit des Motors (ohne Reibung) beträgt somit etwa 521 000 Joule bzw. etwa 0,145 Kilowattstunden.

Rechenaufgabe 4:

Hunde ziehen zwei Stunden lang einen Schlitten mit v = 15 km/h auf einer horizontalen Spur. Die Zugkraft in Richtung der waagrecht liegenden Zugseile beträgt 120 N. Bestimme die verrichtete Arbeit. Diskutiere, was mit der übertragenen Energie geschieht.

Antwort:

Die Arbeit, die von den Hunden verrichtet wird, kann mit der Formel für die (mechanische) Arbeit, die als Produkt aus der aufgewendeten Kraft $\boldsymbol{F_A}$ und dem zurückgelegten Weg $\boldsymbol{s}$ definiert ist, berechnet werden:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{F_A} \cdot \boldsymbol{s}$$

Den Weg können wir berechnen, indem wir die verstrichen Zeit von 2 Stunden mit der Zuggeschwindigkeit multiplizieren:

$$s = 2\ \mathrm{h} \cdot 15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 30\ \mathrm{km} = 3 \cdot 10^4\ \mathrm{m}$$

Wir setzen die entsprechenden Werte in die obige Formel für die Arbeit ein:

$$\boldsymbol{W} = 120\ \mathrm{N} \cdot 3 \cdot 10^4\ \mathrm{m} = \mathbf{3{,}6 \cdot 10^6\ J} = \mathbf{1\ kWh}$$

Die verrichtete Arbeit beträgt somit 3 600 000 Joule bzw. 1 Kilowattstunde.

Die übertragene Energie wird größtenteils in die kinetische Energie des Schlittens umgewandelt, die es ihm ermöglicht, der vorhandenen Reibung entgegenzuwirken und sich zu bewegen. Ein Teil der Energie wird jedoch auch in Wärmeenergie umgewandelt, die aufgrund der Reibung zwischen dem Schlitten und dem Schnee (sowie der Wärmeenergie aus der inneren Arbeit in den Muskeln der Hunde) entsteht. Diese Wärmeenergie wird an die Umgebung abgegeben.

Rechenaufgabe 5:
Ein Bergsteiger (m = 70 kg) besteigt von Heiligenblut (1 279m) aus den Großglockner (3 789m). Ermittle die dabei verrichtete Arbeit.

Antwort:
Die Arbeit, die beim Aufstieg verrichtet wird, kann mit der Formel für die potenzielle Energie berechnet werden:

$$\boldsymbol{W = E_p = m \cdot g \cdot h}$$

(m... Masse des Bergsteigers, g... Erdbeschleunigung (etwa 9.81 m/s^2), h... Höhendifferenz)

Die Höhendifferenz beträgt: $3789\ \mathrm{m} - 1279\ \mathrm{m} = 2510\ \mathrm{m}$

Setzen wir diese Werte in die Formel ein, erhalten wir:

$$W = 70\ \mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\,510\ \mathrm{m} \approx 1{,}724 \cdot 10^6\ \mathrm{J} = \mathbf{1\,724\ kJ} \approx \mathbf{0{,}479\ kWh}$$

Die damit verrichtet Arbeit beträgt somit etwa 1 724 Kilojoule bzw. 0,479 Kilowattstunden.

Rechenaufgabe 6:
Die Leistung wird heute noch manchmal in PS (Pferdestärke) angegeben. Mit 1 PS bezeichnet man jene Leistung, die notwendig ist, um in 1 s einen Körper mit 75 kg Masse 1 m hochzuheben. Wieviel kW entsprechen 1 PS?

Antwort:
Da die Leistung $\boldsymbol{P}$ definiert ist als (verrichtete) Arbeit pro (benötigte) Zeit (und die Arbeit wiederum als Kraft mal Weg bzw. als potenzielle Energie), kann man diese Definition umformulieren zu:

$$\boldsymbol{P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}}$$

($\boldsymbol{W}$... verrichtete Arbeit, $\boldsymbol{t}$ ... benötigte Zeit, $\boldsymbol{m}$ ... Masse des Körpers,
$\boldsymbol{g}$ ... Erdbeschleunigung (etwa 9,81 m/s^2), $\boldsymbol{h}$ ... Höhenunterschied)

Wir setzen die entsprechenden Werte in die angepasste Formel für die Leistung ein:

$$\boldsymbol{P} = \frac{75\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s}} = \mathbf{735{,}75\ W} \approx \mathbf{0{,}736\ kW}$$

1 PS entspricht somit etwa 0,736 kW bzw. vereinfacht ¾ kW.

Rechenaufgabe 7:
Eine Person (m = 65 kg) steigt eine Treppe hinauf. Sie gewinnt dabei 1 m Höhe in 3 Sekunden. Wie groß ist ihre mittlere Leistung? Die Geschoßhöhe in modernen Wohnhäusern ist etwa 3 m. Ermittle die Arbeit, die sie beim Weg vom Erdgeschoß in den 2. Stock verrichten würde.

Antwort:
Da die Leistung $\boldsymbol{P}$ definiert ist als (verrichtete) Arbeit pro (benötigte) Zeit (und die Arbeit wiederum als Kraft mal Weg bzw. als potenzielle Energie), kann man diese Definition umformulieren zu:

$$\boldsymbol{P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}}$$

($\boldsymbol{W}$... verrichtete Arbeit, $\boldsymbol{t}$ ... benötigte Zeit, $\boldsymbol{m}$ ... Masse der Person,
$\boldsymbol{g}$ ... Erdbeschleunigung (etwa 9,81 m/s^2), $\boldsymbol{h}$ ... Höhenunterschied)

Berechnung der (mittleren) Leistung beim Hochsteigen von 1 Meter in 3 Sekunden:

$$P = \frac{65\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{s}} = \mathbf{212,55\ W}$$

Da der zweite Stock in etwa 6 Metern Höhe liegt und eine Person somit 18 s für den Aufstieg benötigen würde, setzen wir diese Werte in die entsprechende Formel für die Arbeit ein:

$$\boldsymbol{W} = 65\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 6\ \mathrm{m} = \mathbf{3825,9\ J}$$

Zusammenfassend beträgt die mittlere Leistung beim Hochsteigen von 1 Meter in 3 Sekunden etwa 212.55 W und die Arbeit, die beim Hochsteigen vom Erdgeschoss in den 2. Stock verrichtet wird, beträgt etwa 3825.9 J.

Rechenaufgabe 8:

Über die Niagarafälle fließen pro Sekunde im Mittel $4 \cdot 10^3\ m^3$ Wasser und stürzen ca. 50 m in die Tiefe. Bis zu 90% der Wassermenge werden nachts auf Kraftwerksturbinen geleitet. Wie viel Leistung (in MW) wird genutzt? Vergleiche das Resultat mit der Leistung des Donaukraftwerks Freudenau.

Antwort:

Da die Leistung $\boldsymbol{P}$ definiert ist als (verrichtete) Arbeit pro (benötigte) Zeit (und die Arbeit wiederum als Kraft mal Weg bzw. als potentielle Energie), kann man diese Definition umformulieren zu:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{h}}{\boldsymbol{t}}$$

($\boldsymbol{W}$... verrichtete Arbeit, $\boldsymbol{t}$ ... benötigte Zeit, $\boldsymbol{m}$ ... Wassermasse,
$\boldsymbol{g}$ ... Erdbeschleunigung (etwa 9,81 m/s^2), $\boldsymbol{h}$ ... Höhenunterschied)

Die Masse des Wassers, das pro Sekunde über den Niagarafall fließt, beträgt:

$$4\,000\ \mathrm{m}^3 \cdot 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 4 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Daher beträgt die durch das Wasser des Niagarafalls erzeugte Leistung:

$$P = \frac{4 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 50\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s}} = 1\,962\ \mathrm{MW}$$

Da nachts bis zu 90% der Wassermenge auf Kraftwerksturbinen geleitet werden, beträgt die genutzte Leistung:

$$\boldsymbol{P_{genutzt}} = 1962\ \mathrm{MW} \cdot 0{,}9 = \mathbf{1765,8\ MW} \approx \mathbf{1,77\ GW}$$

Zum Vergleich: Das Donaukraftwerk Freudenau hat eine installierte Leistung von etwa 172 MW. Daher ist die durch das Wasser des Niagarafalls nachts genutzte Leistung etwa zehnmal so groß wie die Leistung des Donaukraftwerks Freudenau.

Rechenaufgabe 9:

Ein Kleinwagen (m = 1 150 kg) erreicht innerhalb von 15 s eine Geschwindigkeit von 100 km/h. Berechne

a) die mittlere Beschleunigung

b) die mittlere Kraft, die der Motor dabei aufbringen muss

c) die Leistung des Motors während der Beschleunigung von 0 km/h auf 18 km/h, von 18 km/h auf 45 km/h und dann auf 90 km/h. Reibung und Luftwiderstand sollen außer Betracht bleiben.

Antwort:

a) Die mittlere Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ kann berechnet werden mit der Formel:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\Delta v}}{\boldsymbol{\Delta t}}$$

($\boldsymbol{\Delta v}$ ... Geschwindigkeitsänderung, $\boldsymbol{\Delta t}$ ... benötigte Zeit)

Die Geschwindigkeit ändert sich von 0 km/h auf 100 km/h (ca. 27,78 m/s) in 15 s.
Daher beträgt die mittlere Beschleunigung:

$$\boldsymbol{a} = \frac{27{,}78\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{15\ \mathrm{s}} \approx \mathbf{1.9}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

b) Die mittlere Kraft $\boldsymbol{F}$, die der Motor aufbringen muss, kann berechnet werden mit der Formel:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{a}$$

($\boldsymbol{m}$ ... Masse des Autos, $\boldsymbol{a}$ ... (mittlere) Beschleunigung)

Daher beträgt die mittlere Kraft:

$$\boldsymbol{F} = 1\ 150\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}9\ \mathrm{m/s^2} = \mathbf{2\ 185\ N} = \mathbf{2{,}185\ kN}$$

c) Die Leistung $\boldsymbol{P}$ des Motors während der Beschleunigung kann berechnet werden mit der Formel:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

($\boldsymbol{F}$ ... aufgebrachte Kraft, $\boldsymbol{v}$ ... Geschwindigkeit)

Wir verwenden für die Geschwindigkeiten das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten:
Zwischen 0 km/h und 18km/h: 9km/h = 2,5 m/s
Zwischen 18 km/h und 45 km/h: 31,5 km/h = 8,75 m/s
Zwischen 45 km/h und 90 km/h: 67,5km/h = 18,75 m/s

Daher betragen die mittleren Leistungen:

$$\boldsymbol{P_{18}} = 2185\ \mathrm{N} \cdot 2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5\ 463\ \mathrm{W} \approx \mathbf{5{,}46kW}$$

$$\boldsymbol{P_{45}} = 2185\ \mathrm{N} \cdot 8{,}75\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 19\ 119\ \mathrm{W} \approx \mathbf{19{,}12kW}$$

$$\boldsymbol{P_{90}} = 2185\ \mathrm{N} \cdot 18{,}75\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 40\ 969\ \mathrm{W} \approx \mathbf{40{,}97kW}$$

Zusammenfassend beträgt die mittlere Beschleunigung etwa 1,9 m/s^2, die mittlere Kraft etwa 2185 Newton. Die mittleren Leistungen des Motors während der Beschleunigung von 0 km/h auf 18 km/h, von 18 km/h auf 45 km/h und dann auf 90 km/h betragen etwa 5,46 kW, 19,12 kW und 40,97 kW.