37 Chaotische Systeme

Vertiefung und Kompetenzüberprüfung

Martin Apolin (Stand Mai 2012)

Starkes und schwaches Kausalitätsprinzip

A1 Jedes Ereignis (die Wirkung) wird durch ein anderes Ereignis (die Ursache) ausgelöst. Das heißt aber auch, dass dieses frühere Ereignis durch ein noch früheres Ereignis ausgelöst worden sein muss und so weiter. Wie hat das also alles angefangen?

A2 Welchen Begriff in Zusammenhang mit Kausalität verdeutlicht Abb. 1 in perfekter Weise?

Abb. 1 zu A2 (Foto: aussiegall; Quelle: Wikipedia)

A3 Man sagt, dass die Quantenmechanik eine „nichtlokale Theorie“ ist. Was könnte damit gemeint sein? Hilf dir mit Abb. 2! Warum widerspricht das Ergebnis dieses Experimentes der klassischen Physik? Und was hat es mit der „spukhaften Fernwirkung“ von EINSTEIN zu tun?

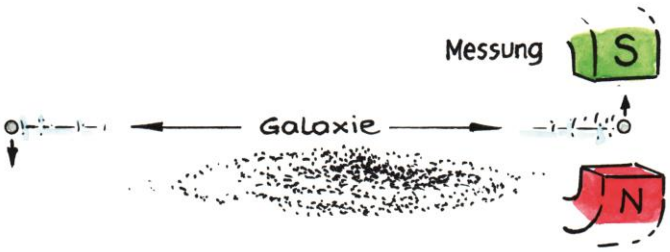

Abb. 2: Ein Teilchen mit Spin 0 zerfällt in zwei Teilchen mit Spin ½. Ohne Messung ist die Spinrichtung aber noch unbestimmt. Durch die Messung beim rechten Teilchen (Spin up) ist automatisch der Spin beim linken Teilchen festgelegt (down). (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 36.21: S. 92).

A4 Normalerweise muss zwischen Ursache und Wirkung eine gewisse Zeit vergehen. Wie ist das in der Quantenmechanik? Hilf dir mit dem Ergebnis von A3!

A5 In Abbildungen 3 siehst du das starke und schwache Kausalitätsprinzip dargestellt. Ordne die Bilder richtig zu!

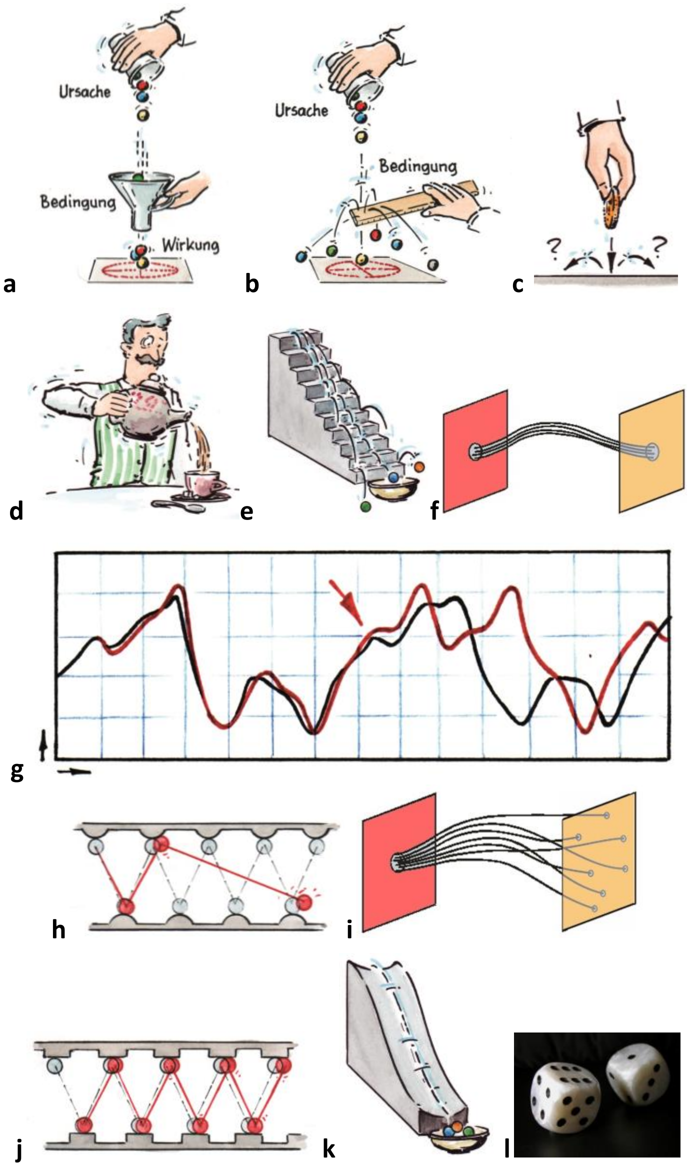

Abb. 3: Verschiedene Darstellungen des schwachen und starken Kausalitätsprinzips (alle Grafiken Janosch Slama mit Ausnahme von f und i (Martin Apolin) und l (Wikipedia)).

A6 Wann sind Ereignisse an zwei verschiedenen Orten gleichzeitig? Man kann sich mit einem Lichtblitz helfen (Abb. 4 nächste Seite). Wenn du diesen genau in der Mitte zwischen zwei Orten auslöst (C), dann braucht das Licht für beide Strecken gleich lang und kommt daher zur selben Zeit bei A und B an. Du könntest mit dem Lichtblitz zum Beispiel zwei Stoppuhren starten (das wären die Ereignisse). Nun kann man aber im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie zeigen, dass Gleichzeitigkeit relativ ist (siehe Kap. 38, BB8). Wenn für einen ruhenden Beobachter die Lichtstrahlen bei A und B gleichzeitig auftreffen, kann es einen dazu bewegten Beobachter geben, bei dem der Lichtstrahl zuerst bei A und dann bei B auftrifft oder auch umgekehrt. Daher formu-

liert man: Ob zwei Ereignisse an verschiedenen Orten gleichzeitig stattfinden oder nicht, hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab.
Nimm einmal an, dass man durch Verschränkung (siehe Kap. 29, BB7) Information übertragen könnte (was aber nicht der Fall ist). Was passiert nun, wenn du die Relativität der Gleichzeitigkeit und den Begriff der Kausalität mit einbeziehst? Knifflig!

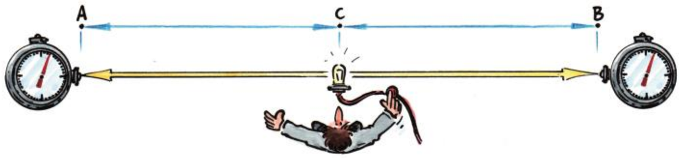

Abb. 4: Wenn die Strecken AC und CB gleich lang sind, erreicht der Lichtblitz A und B gleichzeitig (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 39.18, S. 14, BB8).

A7 Was führt folgendes Beispiel sehr drastisch vor Augen? (Quelle: www.tagesspiegel.de)

„Dienstag, 11. September 2001, halb neun morgens in Manhattan, New York City. Noch ahnt niemand, dass die Welt eine halbe Stunde später eine andere sein wird. Und noch ahnt Lara Lundstrom nicht, dass sie wenig später knapp dem Tod entgeht. Die 24-Jährige ist auf dem Weg in Richtung World-Trade-Center. […] Sie überquert gerade die 7th Avenue, um zum U-Bahnhof zu gelangen, als ein silberner Mercedes-Geländewagen auf sie zurast.
Mit quietschenden Reifen hält das Auto kurz vor ihr an. Sie blickt die Fahrerin an und erkennt die Schauspielerin und Oscarpreisträgerin Gwyneth Paltrow. Einige – entscheidende – Augenblicke lang zögern die beiden Frauen. Jede will jetzt der anderen Vorrang gewähren. Dann geht Lundstrom weiter in Richtung U-Bahn. Dort kann sie gerade noch sehen, wie sich die Türen ihrer Bahn schließen. Lundstrom ärgert sich, dass sie wegen des Beinahe-Unfalls die Bahn verpasst hat. […] Als sie schließlich um 8 Uhr 47 am World-Trade-Center eintrifft, hatte zwei Minuten vorher das erste Flugzeug den Nordturm getroffen."

A8 Begründe an Hand der Großvaterparadoxie (S. 17, BB7), auf welche Art und Weise man bei Zeitreisen in die Vergangenheit mit dem Kausalitätsprinzip in Konflikt kommen kann. Welche spekulativen „Lösungsmöglichkeiten" gibt es dafür?

A9 Welche Chance hätte der Laplace'sche Dämon, um Zukunft und Vergangenheit des Universums zu berechnen? Warum führt dieses Gedankenexperiment schnurstracks in die Philosophie?

Die Geburt der Chaosforschung

A10 Nimm einen Taschenrechner, und tippe den Wert 1 ein. Dann nimm das Quadrat davon. Die Ergebnis ist klarer Weise wieder 1. Nun gib den Wert 1,1 ein (Abb. 5 a). Ziehe so lange wiederholt die Wurzel, bis die Anzeige exakt 1 zeigt (b). Beim Windows-Taschenrechner in der Standardansicht musst du dazu z. B. 48-mal die Wurzel ziehen! Nun quadriere das Ergebnis wieder. Warum wird die Zahl plötzlich wieder größer als 1 (Abb. 5 c)? Was ist der Unterschied zur Eingangsrechnung? Und was hat das mit der Entdeckung des Chaos durch Edward Lorenz zu tun?

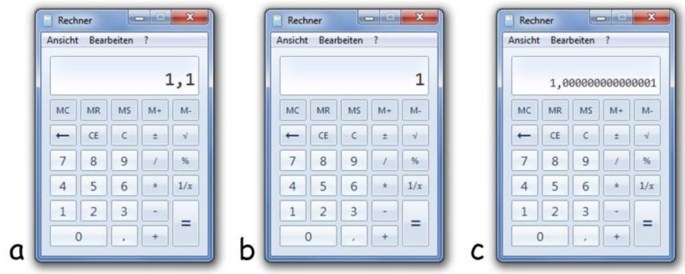

Abb. 5 (Grafik: Martin Apolin)

A11 Edward Lorenz hatte auf einem der ersten Großrechner eine einfache Wettersimulation erschaffen. Als er den Computer eines Tages eine Sequenz noch einmal durchrechnen ließ, ergab sich aber nach einer Zeit ein völlig anderes Ergebnis (siehe Abb. 3g). Was war passiert? Beim ersten Mal hatte Lorenz eine Zahl mit 6 Kommastellen aus dem Computer übernommen (0,506127). Er konnte am Display jedoch nur die ersten drei Nachkommastellen sehen (also 0,506). Die letzten drei Stellen waren nur „intern" (siehe A10). Beim zweiten Mal gab er manuell nur die drei sichtbaren Stellen ein. Diese winzige Änderung von 0,000127 in der Ausgangssituation führte nach einiger Zeit zu einer völlig anderen Entwicklung.

a Verdeutlichen wir das Prinzip der schwachen Kausalität durch wiederholtes Quadrieren. Verwende die Startwerte 1,001 und 1,0011. Diese Startwerte unterscheiden sich also nur um den Wert 10^{-4}. Um welchen Faktor unterscheiden sich die Endergebnisse nach ein bis 19-mal Quadrieren? Führe die Rechnungen mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes durch und erstelle eine Tabelle, wie in Tab. 1 gezeigt. Was fällt dir auf?

wie oft qua-	Startwerte		
	1,001	1,0011	Faktor

driert?			
1-mal	1,002001	1,00220121	1,00019981
2-mal			
….	….	….	….
18-mal			
19-mal			

Tab. 1 zu A11

b Überprüfe nun rechnerisch die Werte nach 19-mal Quadrieren. Überlege dir dazu zunächst eine Formel, mit der man das n-fache Quadrieren einer Zahl in einem Aufwasch berechnen kann, ohne dass man die Rechenschritte einzeln durchführen muss.

c Berechne nun mit Hilfe der Gleichung aus A11 b die Endwerte, wenn du die Zahlen 1,001 und 1,0011 19-mal quadrierst. Wandle dazu die Zahlen auf die Basis 10 um. Es gilt allgemein $x^m = 10^{\log x \cdot m}$.

A12 Die Entdeckung, dass sich wesentlich mehr Systeme chaotisch verhalten als gedacht, fiel in die Anfangszeit der Computer. Warum war das kein Zufall?

A13 Warum kann man das Wetter auf eine Woche, das Klima aber auf ein Jahrhundert im Voraus sinnvoll einschätzen (siehe Abb. 6)?.

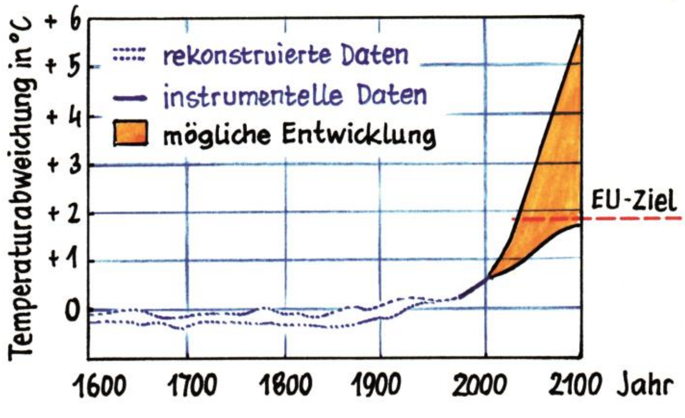

Abb. 6: Simulierte Entwicklung der globalen Durchschnittstemperatur bis 2100. Die große Streuung entsteht vor allem durch Unsicherheit in der Entwicklung des CO_2-Ausstoßes (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 32.12, S. 45).

A14 Warum darf man den „Schmetterlingseffekt" nicht wörtlich nehmen, sondern nur als Metapher?

A15 Was versteht man unter dem „Schneeballeffekt"? Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Schneeballeffekt und dem Dominoeffekt (siehe Abb. 1)? Ist der Schmetterlingseffekt ein Schneeballeffekt?

A16 In Abb. 7 siehst du eine Kettenreaktion. Trifft ein Neutron zum Beispiel auf U-235, wird der Kern instabil. Er beginnt zu schwingen und zerfällt in zwei mittelschwere Kerne. Dabei werden neue Neutronen frei, die wiederum andere U-235-Atome spalten können und so weiter. Eine solche Reaktion kam zum Beispiel bei der Hiroshima-Bombe zum Einsatz. Handelt es sich dabei um den Schmetterlings- oder um den Schneeballeffekt? Verwende dazu auch Abb. 8 und Tab. 2.

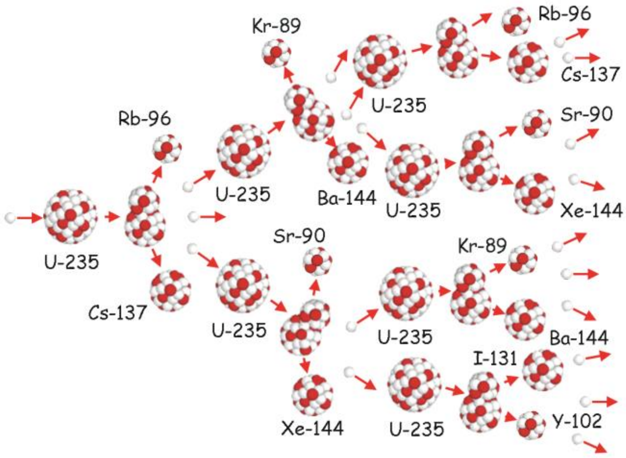

Abb. 7: Eine Kettenreaktion bei der Spaltung eines U-235-Atoms (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 46.3, S. 67, BB8).

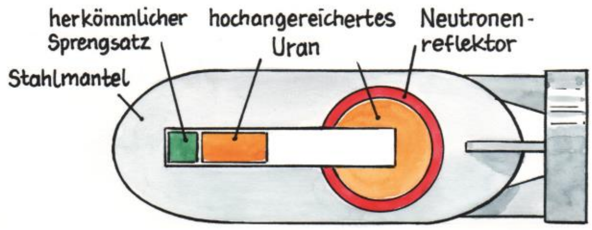

Abb. 8: Schematische Darstellung der Hiroshima-Bombe. Sie enthielt in Summe etwa 51 kg U-235 (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 46.19, S. 42, BB8).

Isotop	kritische Masse Neutronen werden …	
	nicht reflektiert	reflektiert
Uran-235; kam in der Hiroshima-Bombe zum Einsatz.	49,0 kg	22,8 kg
Plutonium-239; kam in der Nagasaki-Bombe zum Einsatz.	10,0 kg	5,42 kg

Tab. 2: Kleinste kritische Massen bei Kugelform. Wird diese Menge überschritten, kommt es zur Kettenreaktion.

A17 Für eine Wetterprognose verwendet man Gittermodelle, bei denen man pro „Masche" die Durchschnittswerte der Wetterdaten annimmt. So gibt es globale Gittermodelle für die ganze Erde (Maschenweite 60 km) und lokale Modelle, etwa das für Europa (7 km). Warum verwendet man nicht für die ganze Erde 7 km? Dann könnte man sich doch das europäische Modell sparen?

Turbulenzen

A18 In Zusammenhang mit Turbulenzen spricht man auch vom deterministischen Chaos. Was könnte damit gemeint sein? Hilf dir mit Abb. 9!

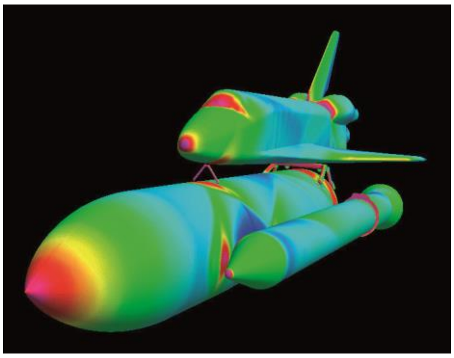

Abb. 9: Computersimulation der durchschnittlichen Luftdruckverteilung beim Spaceshuttle in der Startphase. Die Gebiete mit dem höchsten Druck sind rot, die mit dem niedrigsten blau dargestellt (Quelle: NASA).

A19 Begründe das Verhalten des Zigarettenrauchs in Abb. 10. Verwende dabei die Begriffe laminar, turbulent, Dichte, beschleunigen, Geschwindigkeit und chaotisch!

Abb. 10 (Quelle: Wikipedia)

A20 Turbulente Fluide sind immer chaotisch. Man kann dann zwar vorhersagen, dass Wirbel entstehen, aber es ist unmöglich, deren Dynamik exakt zu berechnen, etwa beim Rauch (siehe Abb. 10). Die großen Wirbel zerfallen in immer kleinere, bis schließlich durch Reibung die Bewegungsenergie völlig in Wärme umgewandelt wird. Die kleinsten Wirbel sind Bruchteile von Millimetern groß, müssen aber trotzdem berücksichtigt werden. Selbst mit Supercomputern würde eine exakte Simulation Jahre benötigen – abgesehen davon, dass man die genaue Ausgangssituation ja gar nicht kennt. Warum kann man dann auf der anderen Seite Rauch in Computerspielen oder computeranimierten Filmen so realistisch darstellen?
In Abb. 11 siehst du etwa den Snapshot eines Werbevideos der NVIDIA Corporation. Die Luftturbulenzen, die ein Auto verursacht, sind durch einen rauchartigen Effekt in Echtzeit dargestellt. Das bedeutet, dass die Simulation exakt so schnell erfolgt wie die Bewegung in Wirklichkeit dauert, wie das etwa in Videospielen der Fall sein muss. Ist das nicht ein Widerspruch zur einleitenden Erklärung? Hilf dir mit der Legende der Abbildung!

Abb. 11: NVIDIA® Real Time GPU Based 3D Fluid and Paricle Simulation and Rendering Using CUDATM; 0,5 Million Particles.

A21 Nimm an, du könntest in Abb. 10 zwei Rauchmoleküle, die sich knapp über der Zigarette direkt nebeneinander befinden, markieren. Was könntest du über deren weiteren Weg nach oben aussagen? Verwende dabei die Begriffe starke und schwache Kausalität, laminar, turbulent und chaotisch. Ordne die Begriffe auch Abb. 12 a und b zu.

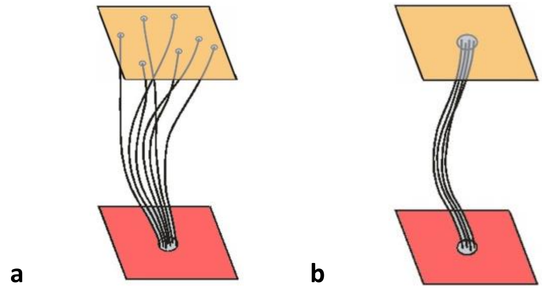

Abb. 12 zu A21 (Grafik: Martin Apolin)

Dreikörper-, Mehrkörperproblem und Chaos

A22 a Im Film *Tomb Raider* wird behauptet, dass sich die Planeten unseres Sonnensystems alle 5000 Jahre in einer sogenannten Linearkonstellation befinden, also in einer Reihe. Im Film *2012* wird behauptet, dass Ende 2012 alle Planeten *und* das Zentrum der Milchstraße in einer Reihe stehen, was angeblich nur alle 640.000 Jahre passiert. Ist eine solche Linearkonstellation tatsächlich möglich? Was müsste das für die Umlaufzeiten der Planeten bedeuten, und wie sieht es in der Praxis tatsächlich aus? Verwende für deine Antwort die Tabellen 3 und 4.

Planet	Umlaufzeit [a]	5000 a/Umlaufzeit
Merkur	0,2408467	20760,0935
Venus	0,61519726	8127,47443
Erde	1	5000
Mars	1,8808476	2658,37594
Jupiter	11,862615	421,492226
Saturn	29,447498	169,793712
Uranus	84,016846	59,5118746
Neptun	164,79132	30,3414039

Tab. 3

Planet	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
Merkur	1	0,391	0,241	0,128	0,020	0,008	0,003	0,001
Venus	2,554	1	0,615	0,327	0,052	0,021	0,007	0,004
Erde	4,152	1,625	1	0,532	0,084	0,034	0,012	0,006
Mars	7,809	3,057	1,881	1	0,159	0,064	0,022	0,011
Jupiter	49,254	19,283	11,863	6,307	1	0,403	0,141	0,072
Saturn	122,267	47,867	29,447	15,657	2,482	1	0,350	0,179
Uranus	348,840	136,569	84,017	44,670	7,082	2,853	1	0,510
Neptun	684,217	267,867	164,791	87,615	13,892	5,596	1,961	1

Tab. 4: Verhältnisse der Umlaufzeiten zwischen jeweils zwei Planten

A22 b In Abb. 13 siehst du, wie die Bahn eines kleinen Planeten von zwei großen beeinflusst wird. Erkläre, wie es zu den Bahnabweichungen kommt. Erkläre mit Hilfe dieser Abbildung allgemein, warum stabile Planetenbahnen nur dann möglich sind, wenn die Umlaufzeiten der Planeten in *keinem* ganzzahligen Verhältnis stehen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesem Effekt und den Lücken in den Ringen des Saturn (Abb. 14)?

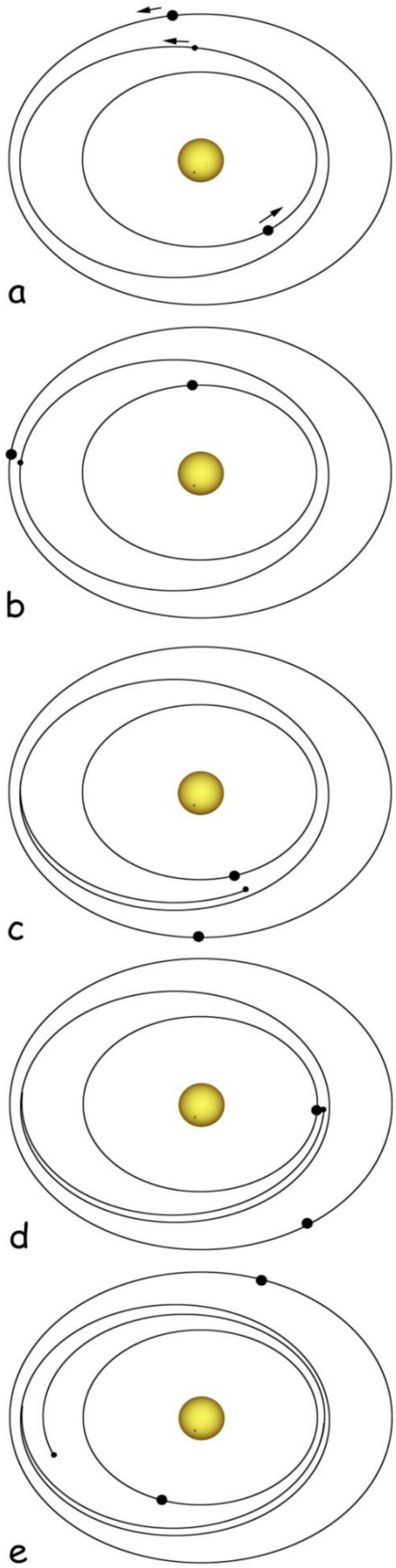

Abb. 13: Der Einfluss von zwei großen Planeten auf die Bahn eines kleinen (Grafik: Martin Apo-

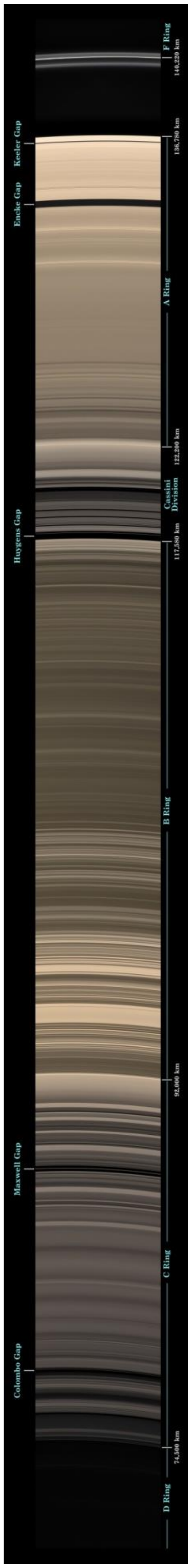

Abb. 14: Längsschnitt durch die Ringe des Saturn (Quelle: NASA)

lin).

A23 Der Sonnenbeobachtungssatellit SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) befindet sich im so genannten Lagrange-Punkt 1 (L_1; Abb. 15). Die Sonde WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), die die kosmische Hintergrundstrahlung des Urknalls untersuchte, befand sich im L_2-Punkt. Beide Satelliten umkreisen gemeinsam mit der Erde in einem Jahr die Sonne. Wie ist das möglich? Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz gibt es für eine bestimmte Umlaufzeit nur einen bestimmten Abstand zur Sonne.

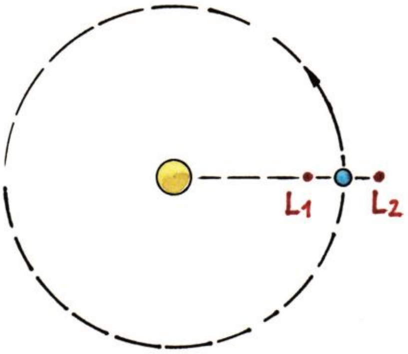

Abb. 15 (Grafik: Janosch Slama)

Mathematik des Chaos

A24 In Abb. 16 siehst du exemplarisch Populationsschwankungen bei Räuber und Beute (wie das etwa bei Hechten und Forellen in einem Teich der Fall ist). Begründe qualitativ den Verlauf der Beute- und Räuberpopulation. Was sticht besonders ins Auge?

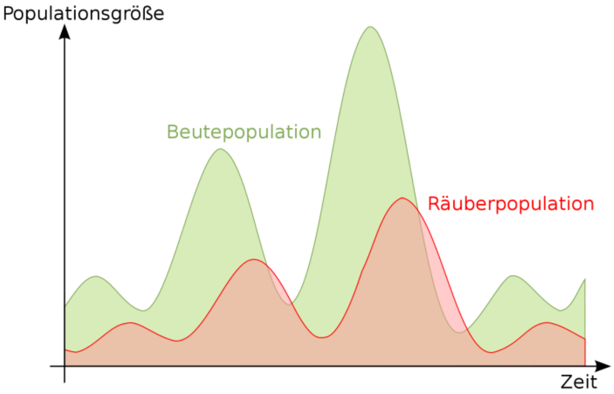

Abb. 16: Populationsschwankungen bei Räuber und Beute (Grafik: Curtis Newton; Quelle: Wikipedia).

A25 Berechne mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes die Entwicklung einer Raupenpopulation. Verwende dazu die VERHULST-Gleichung aus dem Kapitel 37.5 *Ein Universum voller Raupen* (S. 100) und beginn mit den Startwerten 0,1 und 0,101. Versuche Abb. 17 oben und unten darzustellen.

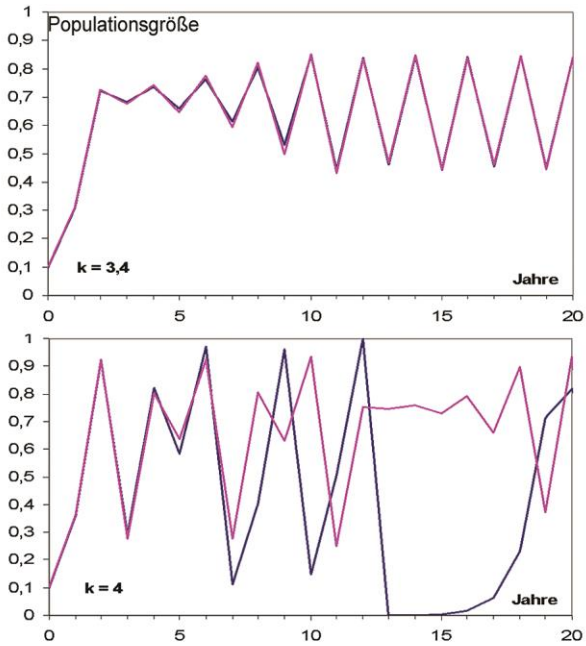

Abb. 17: Verlauf der Populationsgröße von Schwammspinnern mit den Ausgangswerten 0,1 und 0,101 bei zwei verschiedenen Wachstumsfaktoren (Grafik: Martin Apolin).

A26 Überprüfe mit einem Tabellenkalkulationsprogramm die Entwicklung der Zahlenfolge in Abb. 18. Startpunkt (roter Pfeil): a = –0,4, b = 0,5.

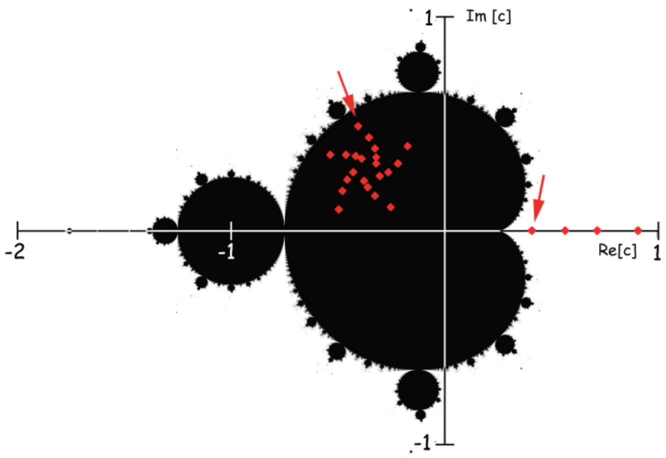

Abb. 18: Die Entwicklung der Zahlenfolge mit dem Startwert a = –0,4, b = 0,5. Die Zahlenfolge konvergiert, daher gehört der Startpunkt zur Mandelbrotmenge (Grafik: Martin Apolin).

Hilfe zu A1: Tatsächlich erhebt sich die Frage, was die erste aller Ursachen war. Aus heutiger Sicht war das der Urknall. Was davor kam oder ob es überhaupt ein Davor gibt, ist bereits eher eine philosophisch-theologische Diskussion, weil es sich völlig der Überprüfbarkeit entzieht.

Hilfe zu A2: Die Abbildung verdeutlicht den Begriff der kausalen Kette.

Hilfe zu A3: Mit „nichtlokaler Theorie“ meint man, dass Messungen, die man an weit entfernten, verschränkten „Objekten“ vornimmt, also etwa Elektronen oder Photonen, einander ohne Verzögerung beeinflussen. Die Messung des Spins des einen Teilchens am Rand der Galaxis beeinflusst instantan das Teilchen am anderen Rand der Galaxis und legt dessen Eigenschaften fest. Nach der klassischen Physik dürfte diese Information nur mit Lichtgeschwindigkeit durch die Galaxis laufen, nach der „nichtlokalen Theorie“ der Quantenmechanik ist sie aber eben in Nullzeit da - spukhafte Fernwirkung also.

Hilfe zu A4: Nachdem die Quantenmechanik eine „nichtlokale Theorie“ ist (siehe A3), muss zwischen Ursache und Wirkung *keine* Zeit vergehen. Selbst Messungen an verschränkten Quanten, die an den gegenüberliegenden Enden der Galaxis durchgeführt werden, beeinflussen einander in Nullzeit. Klassisch gesehen müsste es aber 100.000 Jahr dauern, bis das andere Quant davon „erfährt“.

Hilfe zu A5: starkes Kausalitätsprinzip: a, d, f, j und k; schwaches Kausalitätsprinzip: b, c, e, g, h, i und l

Hilfe zu A6: Man könnte mit der Speziellen Relativitätstheorie so argumentieren: Wenn A in deinem System vor B misst, gibt es einen relativ zu dir bewegten Beobachter, der sieht, dass A *nach* B misst. Gäbe es eine Informationsübertragung in Nullzeit von A zu B, so wäre das aus der Sicht des bewegten Systems eine Nachricht in die Vergangenheit, also Hellsehen! B würde also die Information bekommen, bevor sie A überhaupt geschickt hat. Nachrichten in die Vergangenheit führen aber immer zu Paradoxien. Du könntest dir zum Beispiel eine Nachricht in die Vergangenheit schicken, um dich zu erinnern, dass du dir eine Nachricht in die Vergangenheit schickst. Was passiert aber, wenn du dann später beschließt, dir *keine* Nachricht in die Vergangenheit zu schicken? Hättest du sie dann vorher bekommen oder nicht?

Hilfe zu A7: Dieses Beispiel führt sehr drastisch vor Augen, dass im Leben nicht nur das starke, sondern unter bestimmten Umständen auch das schwache Kausalitätsprinzip eine Rolle spielt, denn in diesem Fall gibt es für den weiteren Verlauf nur die Möglichkeiten tot oder lebendig!

Hilfe zu A8: Nehmen wir an, du reist in die Vergangenheit und bringst deinen Großvater zur Strecke, bevor er deinen Vater zeugt. Wenn du deinen Großvater umbringst, würdest du gar nicht geboren werden und könntest somit auch nicht in die Vergangenheit reisen und deinen Großvater umbringen. Dadurch würdest du aber doch geboren werden, könntest in der Zeit zurückreisen und so weiter und so fort! Das Prinzip von Ursache und Wirkung würde somit durcheinandergebracht werden.
Welche – spekulativen – Auswege gibt es? Eine Möglichkeit wäre, dass du nur dann zurückreisen kannst, wenn du schon in der Vergangenheit dort gewesen bist. Du könntest dann nichts verändern, weil es ja schon so passiert ist. Es könnte auch möglich sein, dass du mit dem Zurückreisen in eine alternative Geschichte in ein Paralleluniversum gerätst (siehe Viele-Welten-Interpretation, Kap. 36.1). Oder, ganz unromantisch: Die Naturgesetze verbieten Reisen in die Vergangenheit!

Hilfe zu A9: Im Rahmen der Naturgesetze hat der Dämon keine Chance. Dafür gibt es drei Gründe:
1) Nach der Relativitätstheorie (Kap. 39ff, BB8) kann sich Information mit maximal Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Daher gibt es einen „Horizont“, über den der Dämon nicht hinausblicken kann, um seine Information zu sammeln.
2) Im Bereich der Quanten sind nur Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich. Dem Dämon wäre es etwa unmöglich zu sagen, welchen Weg ein Photon durch einen Doppelspalt nimmt (Kap. 33.2). Außerdem verbietet die Unschärferelation, alle Merkmale eines Quants gleichzeitig exakt zu bestimmen (Kap. 33.4).
3) Schließlich würde das schwache Kausalitätsprinzip den Dämon vor eine unlösbare Aufgabe stellen. Denn es ist unmöglich, unendlich genau zu messen (siehe auch Punkt 2 oben). Durch das chaotische Verhalten des Universums wirken sich aber winzige Änderungen der Ausgangssituation später einmal sehr drastisch aus (siehe A7).
Man könnte natürlich argumentieren, dass der Dämon über den Naturgesetzen steht (ähnlich wie Q in der Serie Star Trek) und alle diese Schwierigkeiten daher umgehen kann.

Dann ist dieses Gedankenexperiment aber ein Fall für die Philosophie und nicht mehr für die Naturwissenschaften. Denn alle Entitäten dieses Universum unterliegen den naturwissenschaftlichen Gesetzten.

Hilfe zu A10: Die Wurzel aus einer Zahl größer als 1 kann niemals *exakt* 1 sein! Warum? Weil das Quadrat des Endwertes ja wieder den Ausgangswert ergeben muss, und 1^2 wäre wieder exakt 1 und nicht der Ausgangswert. Warum zeigt aber die Anzeige des Taschenrechners nach einiger Zeit trotzdem 1 an? Weil die Stellen nicht mehr ausreichen, um mehr Ziffern anzuzeigen! Wenn du zum Beispiel den Windows-Rechner in der wissenschaftlichen Ansicht verwendest und 48-mal hintereinander die Wurzel aus dem Startwert 1,1 ziehst, sieht es zum Schluss so aus wie in Abb. 19 b.

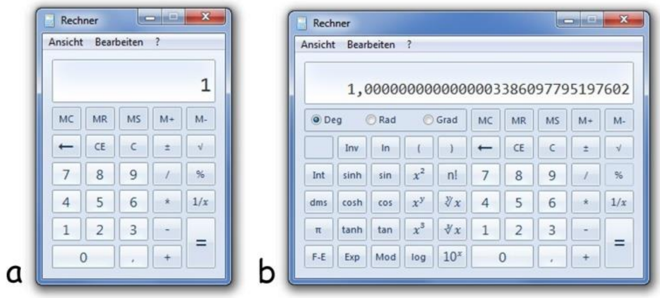

Abb. 19 (Grafik: Martin Apolin)

Das Beispiel zeigt, dass ein Taschenrechner immer „interne Stellen" hat, die er zwar nicht mehr anzeigt, die aber trotzdem gespeichert sind. Sonst würde ja das Quadrat der letzten Zahl immer 1 bleiben. Auf ähnliche Art und Weise hat Edward Lorenz in den 1960ern die Physik des Chaos entdeckt. Einmal übernahm er das Ergebnis einer vorherigen Rechnung, einmal tippte er den Startwert manuell ein. In beiden Fällen war der angezeigte Wert 0,506. Im ersten Fall war aber die interne, gespeicherte Zahl 0,506127. Die letzten drei Ziffern wurden am Display aber nicht angezeigt, führte aber nach einiger Zeit zu völlig anderen Werten (schwaches Kausalitätsprinzip).

Hilfe zu A11 a: Es fällt auf (Tab. 5), dass der Unterschied (der Faktor) zunächst sehr gering ist und erst gegen Ende extrem stark anwächst. Der Fehler macht sich also erst nach sehr vielen Wiederholungen bemerkbar.

wie oft quadriert?	Startwerte		
	1,001	1,0011	Faktor
1-mal	1,002001	1,002201	1,000200
2-mal	1,004006	1,004407	1,000400
3-mal	1,008028	1,008834	1,000799
4-mal	1,016121	1,017746	1,001600
5-mal	1,032501	1,035807	1,003202
6-mal	1,066058	1,072896	1,006414
7-mal	1,136480	1,1511053	1,012869
8-mal	1,291588	1,325043	1,025903
9-mal	1,668198	1,755740	1,052477
10-mal	2,782886	3,082623	1,107708
11-mal	7,744451	9,502566	1,227016
12-mal	59,976533	90,298761	1,505568
13-mal	$3{,}597185 \cdot 10^{3}$	$8{,}153866 \cdot 10^{3}$	2,266736
14-mal	$1{,}293974 \cdot 10^{7}$	$6{,}648553 \cdot 10^{7}$	5,138090
15-mal	$1{,}6744 \cdot 10^{14}$	$4{,}42033 \cdot 10^{15}$	26,399973
16-mal	$2{,}8035 \cdot 10^{28}$	$1{,}95393 \cdot 10^{31}$	$6{,}969586 \cdot 10^{2}$
17-mal	$7{,}8597 \cdot 10^{56}$	$3{,}81784 \cdot 10^{62}$	$4{,}857512 \cdot 10^{5}$
18-mal	$6{,}177 \cdot 10^{113}$	$1{,}4576 \cdot 101^{25}$	$2{,}359543 \cdot 10^{11}$
19-mal	$3{,}816 \cdot 10^{227}$	$2{,}1246 \cdot 10^{250}$	$5{,}567441 \cdot 10^{22}$

Tab. 5 zu A11 a

Hilfe zu A11 b: Es gilt $(x^2)^2 = x^{2\cdot 2} = x^{2^2}$, $((x^2)^2)^2 = x^{2^3}$ und allgemein $((x^2)^2)\ldots)^2 = x^{2^n}$.

Hilfe zu A11 c: Wenn du den Startwert 1,001 19-mal quadrierst, erhältst du $1{,}001^{2^{19}} = 10^{\log 1{,}001 \cdot 524288} \approx 10^{227{,}58}$. Wenn du den Startwert 1,0011 19-mal quadrierst, erhältst du $1{,}0011^{2^{19}} = 10^{\log 1{,}0011 \cdot 524288} \approx 10^{250{,}33}$. Diese beiden Zahlen unterscheidet der Faktor $10^{250{,}33}/10^{227{,}58} = 10^{22{,}75} = 10^{0{,}75} \cdot 10^{22} = 5{,}6 \cdot 10^{22}$. Die kleine Differenz zum letzten Wert in der Tabelle ist auf Rundungsfehler zurückzuführen.

Hilfe zu A12: Abbildung 3e und Aufgabe A11 zeigen, dass man die chaotische Natur mancher Systeme (also die Tatsache, dass sie dem schwachen Kausalitätsprinzip unterliegen) oft erst nach vielen Rechenschritten bemerken kann. Zur Berechnung der Entwicklung sind dann aber Computer notwendig. Eine Wettersimulation kann man nicht per Hand rechnen.

Hilfe zu A13: Weil man beim Klimaszenario ja nicht die Temperatur für einen bestimmten Ort an einem bestimmten Tag berechnet, sondern die globale Durchschnittstemperatur für ein Jahr, und das ist etwas ganz anderes! Wenn man die Temperatur, die es z. B. in einer Woche in Graz haben soll, prognostiziert, kann man gut und gerne bei einer überraschenden Wetterentwicklung auch einmal um 10 °C danebenliegen. Wenn man aber die globale Jahresdurchschnittstemperatur berechnet, wird man nur Bruchteile eines Grades danebenliegen, weil sich die „Temperaturüberraschungen“ die Waage halten.

Hilfe zu A14: Mit dem Begriff Schmetterlingseffekt meinte Lorenz, dass der Flügelschlag eines Schmetterlings, also eine minimale Änderung der Ausgangsbedingungen, an einer weit entfernten Stelle der Erde einen Orkan auslösen *könnte*, nicht *muss*. Der Schmetterlingseffekt ist also eine bildliche Umsetzung des schwachen Kausalitätsprinzips. Aber bei weitem nicht *jede* kleine Änderung löst klarer Weise einen Orkan aus, denn dann würde auch jede deiner Handbewegungen ein Wetterchaos verursachen. Es wird hier also nur eine Möglichkeit beschrieben!

Hilfe zu A15: Der Schneeballeffekt beschreibt sich aufschaukelnde Kettenreaktionen. Der Begriff leitet sich vom rollenden und dabei anwachsenden Schneeball ab, der im Gebirge womöglich Lawinenausmaße annehmen kann. So kann z. B. ein schiefer Blick zum Streit und dieser zu einer Massenschlägerei anwachsen. Das bedeutet, dass der Schneeballeffekt mit fortdauernder Zeit immer größere Ausmaße annimmt. Im Gegensatz zum Dominoeffekt steigt beim Schneeballeffekt die Intensität der Wirkung an.
Oft wird auch der Schmetterlingseffekt als Synonym für den Schneeballeffekt angesehen. Das ist jedoch nicht richtig. Der Schneeballeffekt meint, dass sich kleine Effekte über eine Kettenreaktion verstärken. Der Schmetterlingseffekt meint, dass kleine Abweichungen langfristig ein ganzes System vollständig und unvorhersagbar verändern können. Z. B. kann eine kleinen Änderung der Ausgangsituation nach einer Woche statt einem vorhergesagten Gewittersturm einen ruhigen Tag mit Sonnenschein erzeugen. Hier hätte sich also nichts aufgeschaukelt, hier sogar etwas beruhigt. Anders gesagt: Der Schmetterlingseffekt *kann* zu einem Schneeballeffekt führen, muss aber nicht!

Hilfe zu A16: Es handelt sich dabei um das Aufschaukeln und Verstärken eines Effekts, also um den Schneeballeffekt. Der Effekt kann sehr genau vorhergesagt werden, wenn man die kritische Masse weiß. Durch Zünden des Sprengsatzes werden die beiden Uranmassen zueinander gebracht (siehe Abb. 8), und die kritische Masse wird überschritten. Dabei wird in jedem Fall eine Kettenreaktion ausgelöst (siehe Tab. 2), egal ob das Uran-235 in Summe 49,9 kg, 51 kg oder 51,1 kg hat.

Hilfe zu A17: Beim Modell muss man einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechendauer finden. Ein Weltmodell mit kleiner Maschenweite wäre natürlich exakter, hätte aber eine extrem lange Rechendauer zur Folge. Natürlich ist eine Wettervorhersage nur sinnvoll, wenn sie vor dem Wetter getroffen wird, was bei langer Rechendauer aber nicht mehr der Fall wäre.

Hilfe zu A18: Im chaotischen Verhalten von turbulenten Strömungen gibt es trotzdem eine gewisse Ordnung. Wenn das nicht so wäre, dann könnte ja ein Flugzeug niemals fliegen. Wenn Physiker die Aerodynamik eines Flugkörpers berechnen, sind sie meistens nicht an den kleinsten Wirbeln interessiert, sondern am durchschnittlichen Strömungsverhalten, und das ist trotz des chaotischen Verhaltens der einzelnen Moleküle vorhersagbar. Deshalb spricht man vom deterministischen (also vorhersagbaren) Chaos. Es ist ähnlich wie beim Würfeln. Welche Zahl oben liegen wird, kann man auf Grund des chaotischen Verhaltens des Würfels nicht vorhersagen, sehr wohl aber, dass ein 6er im Schnitt jedes sechste Mal gewürfelt wird.

Hilfe zu A19 (zu verwendende Begriffe sind kursiv): Zunächst ist der Rauch *laminar*, also nicht-turbulent. Der heiße Rauch der Zigarette wird aber durch seine geringere *Dichte* nach oben *beschleunigt* und somit erhöht sich seine *Geschwindigkeit*. Überschreitet der Rauch eine bestimmte Grenzgeschwindigkeit, wird er *turbulent* bzw. *chaotisch* (es bilden sich also Wirbel aus).

Hilfe zu A20: Eine real aussehende Simulation von Rauch und eine Vorhersage, wie sich *sämtliche* Partikel *exakt* verhalten werden, sind zwei verschiedene Paar Schuhe. Bei einer Simulation berechnet man mit Hilfe von physikalischen Gesetzen, wie sich eine relativ geringe Anzahl von Teilchen verhalten würden. In Abb. 11 wurden z. B. 500.000 Teilchen berechnet. Das hört sich recht viel an, aber ein Mol Luft hat unter Normalbedingungen etwa 23 dm^3 und beinhaltet dabei rund 10^{24} Moleküle! Der simulierte Rauch sieht zwar ähnlich aus wie echter, aber man kann keine Vorhersagen treffen, und darum geht es ja in der einleitenden Aussage zu A20.

Hilfe zu A21: Im laminaren Teil der Strömung, also im unteren Teil, gilt das starke Kausalitätsprinzip. Wenn die Teilchen zu Beginn knapp beieinander sind, werden sie auch einige Zentimeter weiter oben knapp nebeneinander sein (Abb. 12 b). Vorhersagen über die Bahnen sind also mit guter Genauigkeit möglich. Wenn der Rauch aber turbulent, also chaotisch wird, gilt das schwache Kausalitätsprinzip (Abb. 12 a). Vorhersagen über die Bahnen sind also praktisch unmöglich. Die beiden Teilchen könnten sich dann nach kurzer Zeit auch rein theoretisch an den gegenüberliegenden Teilen des Rauchs befinden.

Hilfe zu A22 a: Nehmen wir einmal an, die Planeten würden alle 5000 Jahre in einer Reihe liegen. Wenn das so wäre, dann müsste die Zahl 5000 ein ganzzahliges Vielfaches der Planetenumlaufbahnen sein. Tabelle 3 zeigt aber, dass das nicht der Fall ist. Generell müssten, wenn es zu einer zyklisch wiederkehrenden Linearkonstellation kommt, die Umlaufzeiten von jeweils zwei Planeten in einem ganzzahligen Verhältnis stehen. Tabelle 4 zeigt, dass das ebenfalls nicht der Fall ist. Es gibt keine regelmäßig wiederkehrenden Linearkonstellationen!

Hilfe zu A22 b: Die Bahn eines ungestörten Planeten hängt von seiner Geschwindigkeit und der Masse des Zentralgestirns ab. In Abb. 13 b und d nähert sich der kleine Planet aber jeweils einem der beiden großen. Dadurch wirkt auf ihn nicht nur die Gravitation des Sterns, sondern auch eines Planeten, was zu einer Bahnablenkung führt. Stünden die Umlaufzeiten in ganzzahligem Verhältnis, würden sich die Planeten regelmäßig treffen und der Effekt würde sich so lange aufschaukeln, bis der Planet aus seiner Bahn geworfen wird.
Aus ähnlichem Grund gibt es Lücken in den Saturnringen (Abb. 14). Sie entstehen dort, wo die entsprechenden Umlaufszeiten der Gesteinsbrocken in einem ganzzahligen Verhältnis zur Umlaufsdauer eines großen Saturnmondes stehen. Sollte sich doch einmal ein Brocken dorthin verirren, fliegt er nach einiger Zeit wieder raus.
Hilfe zu A23: Ein Körper, der z. B. die Sonne in einem engeren Abstand als die Erde umkreist (etwa in L_1), würde normalerweise eine kürzere Umlaufdauer haben als die Erde. Durch die Anziehungskraft der Erde wird jedoch die Anziehungskraft der Sonne auf den Körper geschwächt (die beiden Kräfte wirken entgegengesetzt), wodurch sich seine Umlaufdauer erhöht und er sich im L_1 des Systems Erde-Sonne synchron zur Erde bewegt. Umgekehrt wäre außerhalb der Erdbahn die Umlaufdauer länger als die der Erde (etwa in L_2). Die zusätzliche Anziehung der Erde (Kräfte von Sonne und Erde auf den Körper sind gleichgerichtet) bewirkt jedoch eine kürzere Umlaufdauer, welche im L_2 wiederum gleich der Umlaufdauer der Erde ist.

Hilfe zu A24: Es fällt auf, dass die Räuberpopulation immer etwas der Beutepopulation hinterherhinkt. Wie kann man das begründen? Gibt es viel Beute, haben die Räuber genügend zu fressen und vermehren sich. Dadurch wird aber die Beutepopulation zunehmend dezimiert. Gibt es weniger Beute, so habe die Räuber nicht mehr genug zu fressen, wodurch sich ihre Population wiederum verringert. Nun kann sich die Beute ungehinderter vermehren, und das ganze Spiel geht wieder von Anfang an los.

Hilfe zu A25: Ein Excel-File mit den entsprechenden Berechnungen findest du unter *bigbang.oebv.at* ▶ *Big Bang 7* ▶ *Kapitel 37 Chaotische Systeme* am Ende des Downloadbereichs.

Hilfe zu A26: Tabelle 6 zeigt die ersten 11 Schritte, Abb. 20 zeigt die ersten 50 Schritte.

	a	b		a	b
0	–0,40000	0,50000	6	–0,47386	0,18823
1	–0,49000	0,10000	7	–0,21089	0,32161
2	–0,16990	0,40200	8	–0,45896	0,36435
3	–0,53274	0,36340	9	–0,32211	0,16555
4	–0,24825	0,11281	10	–0,32365	0,39335
5	–0,35110	0,44399	11	–0,44997	0,24538

Tab. 6

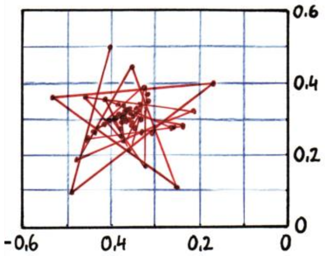

Abb. 20 (Grafik: Janosch Slama)

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 7 | ISBN: 978-3-209-04867-7