Ich kann die Bedeutung der einzelnen Parameter der Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ beschreiben, diese in unterschiedlichen Kontexten deuten und damit argumentieren.

A, C, D **1** Der Zerfallsprozess des radioaktiven Elements Radon 222 kann mit der Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot e^{-0{,}182407 \cdot x}$ beschrieben werden, wobei x die Zeit in Tagen angibt und f(x) die nach x Tagen vorhandene Menge an radioaktivem Material.

a. Interpretiere die Bedeutung des Parameters a sowie der Konstanten -0,182407.

b. Schreibe die Exponentialfunktion f in der Form $f(x) = a \cdot b^x$ an.

c. Erkläre, was der Parameter b in Aufgabe **b.** angibt.

C **2** Es ist b eine beliebige reelle Zahl größer als 1. Ergänze die Aussage so, dass sie richtig ist.

Die Funktion f mit $f(x) = b \cdot e^{a \cdot x}$ beschreibt einen Zerfallsprozess, wenn…	
Die Funktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ beschreibt einen Wachstumsprozess, wenn…	

A	$a > 0$ ist.
B	$a > 1$ ist.
C	$a < 0$ ist.
D	$0 < a < 1$ ist.

D **3** f ist eine Exponentialfunktion mit $f(x) = c \cdot e^{a \cdot x}$, wobei c eine beliebige positive reelle Zahl ist. Beschreibe, welche Auswirkung das Vorzeichen des Parameters a auf den Verlauf der Funktion f hat.

C **4** f ist eine Exponentialfunktion mit $f(x) = c \cdot b^x$, wobei b und c beliebige positive reelle Zahlen sind. Gib an, für welche Werte von b die Funktion f **I.** streng monoton wachsend, **II.** streng monoton fallend ist.

C **5** Gib an, wie sich der Funktionswert f(x) der gegebenen Exponentialfunktion f ändert, wenn man das Argument x um **I.** 1, **II.** 2, **III.** 5, erhöht. Die Zahl a ist dabei eine beliebige positive Zahl.

a. $f(x) = a \cdot 1{,}2^x$

b. $f(x) = a \cdot 0{,}6^x$

A, C, D **6** Der Wert eines Kapitals K nach t Jahren kann mit der Exponentialfunktion K mit $K(t) = 1000 \cdot 1{,}02^t$ beschrieben werden.

a. Interpretiere die in der Funktion auftretenden Zahlen im angegebenen Kontext.

b. Schreibe K in der Form $K(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ an und argumentiere, woran man in dieser Schreibweise erkennen kann, dass K einen Wachstumsprozess beschreibt.

C **7** Ordne der Funktion die richtige Aussage zu.

f mit $f(x) = 2 \cdot 4^x$	
f mit $f(x) = 4 \cdot 2^x$	

A	Wird das Argument x um 1 vergrößert, verdoppelt sich der Funktionswert.
B	Wird das Argument x um 2 vergrößert, verachtfacht sich der Funktionswert.
C	Wird das Argument x um 2 verkleinert, so halbiert sich der Funktionswert.
D	Wird das Argument x um 1 verkleinert, so viertelt sich der Funktionswert.

C, D **8** Der Wert zweier Kapitalien nach t Jahren kann mit den Exponentialfunktionen K_1 und K_2 mit $K_1(t) = 1000 \cdot 1{,}02^t$ und $K_2(t) = 900 \cdot 1{,}05^t$ beschrieben werden.

a. Interpretiere die in den Funktionen auftretenden Zahlen im angegebenen Kontext.

b. Argumentiere, welches Kapital bei gleichbleibender Verzinsung schneller auf 1500€ anwachsen wird.

Autorin: Bettina Ponleitner

Lösungen zu: Ich kann die Bedeutung der einzelnen Parameter der Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ beschreiben, diese in unterschiedlichen Kontexten deuten und damit argumentieren.

1 **a.** Der Parameter a gibt die zum Zeitpunkt $x = 0$ vorhandene Menge an radioaktivem Material an (Anfangsmenge). Die Zahl -0,182407 ist eine Zerfallskonstante für Radon 222. Da die Exponentialfunktion einen Zerfallsprozess beschreibt, ist die Zerfallskonstante negativ.

b. $f(x) = a \cdot 0{,}8333^x$ an.

c. Der Parameter b ist eine Konstante, die angibt, um wieviel Prozent sich der Funktionswert f(x) ändert, wenn das Argument x um 1 vergrößert wird. Da hier ein Zerfallsprozess modelliert wird, liegt b zwischen 0 und 1. Wird das Argument x um 1 vergrößert, nimmt der Funktionswert um ca. 16,67% ab.

2

Die Funktion f mit $f(x) = b \cdot e^{a \cdot x}$ beschreibt einen Zerfallsprozess, wenn…	C
Die Funktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ beschreibt einen Wachstumsprozess, wenn…	B

3 Wenn a positiv ist, so ist f streng monoton wachsend. Wenn a negativ ist, so ist f streng monoton fallend.

4 **I.** $b > 1$ **II.** $0 < b < 1$.

5 **a.** **I.** Der Funktionswert wird um 20% größer (bzw. der Funktionswert steigt auf das 1,2-Fache des Ausgangswerts).

II. Der Funktionswert wird um 44% größer (bzw. der Funktionswert steigt auf das 1,44-Fache des Ausgangswerts).

III. Der Funktionswert wird um ca. 149% größer (bzw. der Funktionswert steigt etwa auf das 2,5-Fache des Ausgangswerts).

b. **I.** Der Funktionswert nimmt um 40% ab (bzw. der Funktionswert sinkt auf das 0,6-Fache des Ausgangswerts).

II. Der Funktionswert nimmt um 64% ab (bzw. der Funktionswert sinkt auf das 0,36-Fache des Ausgangswerts).

III. Der Funktionswert nimmt um ca. 92% ab (bzw. der Funktionswert sinkt etwa auf das 0,08-Fache des Ausgangswerts).

6 **a.** Die Zahl 1000 gibt an, dass das Anfangskapital 1000€ beträgt. Die Zahl 1,02 gibt an, dass das Kapital pro Jahr um 2% wächst, das heißt der Jahreszinssatz beträgt 2%.

b. $K(t) = 1000 \cdot e^{0{,}019803 \cdot t}$. Da die Konstante $k = 0{,}019803$ positiv ist, erkennt man, dass es sich hier um einen Wachstumsprozess handelt.

7

f mit $f(x) = 2 \cdot 4^x$	D
f mit $f(x) = 4 \cdot 2^x$	A

8 **a.** Die Zahlenwerte 1000 bzw. 900 geben die Anfangswerte der beiden Kapitalien an. Das erste Kapital wächst um 2% pro Jahr, das zweite um 5% pro Jahr, das heißt, die Jahreszinssätze betragen 3% bzw. 5%.

b. Das zweite Kapital K_2 wird bei gleichbleibender Verzinsung schneller auf 1500€ anwachsen. Der Ausgangswert ist zwar geringer, die Wachstumsrate liegt mit 5% pro Jahr aber deutlich über jener von Kapital K_1 mit 2%. Daher wächst das zweite Kapital mit zunehmender Zeit schneller als das erste Kapital.

Autorin: Bettina Ponleitner