Höhere Wurzeln

Ist eine reelle Zahl $a \geq 0$, so nennt man jene nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist, die **n-te Wurzel** aus a. Man bezeichnet diese Zahl mit $\sqrt[n]{\mathbf{a}}$.
Es gilt $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$ genau dann, wenn $\mathbf{b^n} = \mathbf{a}$ ($a, b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$).

Weiters gilt für alle reellen Zahlen $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$: $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \sqrt[2n]{\mathbf{a^2}}$.

Ist nun $a < 0$ und n eine gerade natürliche Zahl $\neq 0$, so ist der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ nicht definiert, da es keine positive reelle Zahl b mit $b^n < 0$ gibt. Taschenrechner geben eine Fehlermeldung für ein negatives a aus.

Ist nun $a < 0$ und n eine ungerade natürliche Zahl $\neq 1$, so ist der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ nicht zulässig, da er zu Widersprüchen führt. Dies soll an zwei Zahlenbeispielen verdeutlicht werden:

Beispiel 1: Angenommen, $a = -27$ und $n = 3$, dann wäre $\sqrt[3]{-27}$ laut manchen Taschenrechnern **–3**.

Nun ist aber $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{(-27)\cdot(-27)} = \sqrt[6]{729} = \mathbf{3}$.

Das würde bedeuten: $\mathbf{-3} = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = \mathbf{3}$ und das ist ein Widerspruch.

Beispiel 2: Angenommen, $a = -32$ und $n = 5$, dann wäre $\sqrt[5]{-32}$ laut manchen Taschenrechnern **–2**.

Nun ist aber $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[10]{(-32)^2} = \sqrt[10]{(-32)\cdot(-32)} = \sqrt[10]{1\,024} = \mathbf{2}$.

Das würde bedeuten: $\mathbf{-2} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[10]{(-32)^2} = \sqrt[10]{1\,024} = \mathbf{2}$ und das ist ein Widerspruch.

Deshalb und da die (n-te) Wurzel aus einer reellen Zahl eindeutig sein muss, ist für den Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ mit einer natürlichen ungeraden Zahl $n \neq 1$ nur $\mathbf{a \geq 0}$ zulässig.