Herausfordernde Aufgaben zu Kubikwurzel mit TR, S. 19

Bemerkung zum Arbeiten mit dem TR: Kubikwurzeln sind – wie auch Quadratwurzeln – meist irrationale Zahlen. Der TR erlaubt es aber, gute Näherungswerte zu ermitteln. Bei den meisten TR steht eine $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ -Taste oder eine entsprechende Tastenkombination $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ zur Verfügung. Es kann allerdings auch sein, dass dir direkt die Kubikwurzel als Taste zur Verfügung steht.
Wenn nicht, kannst du mit der $\boxed{\text{INV}}$- und der $\boxed{y^x}$-Taste arbeiten. Die $\boxed{\text{INV}}$-Taste kehrt die Wirkung der danach gedrückten Operationstaste um (der Name $\boxed{\text{INV}}$ kommt vom „to invert“ (eng.) beziehungsweise „invertere“ (lat.) … „umkehren“). Da das Ziehen der 3. Wurzel die Umkehrung des Kubierens ist, wird durch $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{3}$ aus der in der Anzeige stehenden Zahl die 3. Wurzel gezogen. Z.B. wird mit $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{3}$ = die $\sqrt[3]{2}$ = 1,259... gezogen.

Bei Rechnern vom Typ I musst du zuerst den Wurzelexponenten eingeben, dann die Tastenkombination $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ drücken und die Zahl eingeben. Bei anderen Rechnern (TR Typ II) musst du zuerst die Zahl eingeben, dann die Taste $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ drücken und zuletzt den Wurzelexponenten eingeben.

Beispiel: Berechne $\sqrt[3]{15.625}$ am TR.

TR Typ I: $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{(}$15.625 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ **2.5**
TR Typ II mit $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ -Taste: $\boxed{\text{C}}$ 15.625 $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ 3 $\boxed{=}$ **2.5**
TR Typ II ohne $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ -Taste: $\boxed{\text{C}}$ 15.625 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{=}$ **2.5**

1. **Schranken von Kubikwurzeln**
   a. Wie lauten die ersten sieben Kubikzahlen?
   b. Vergleiche mit den Verfahren bei Quadratwurzeln: Zwischen welchen zwei natürlichen Zahlen liegen die folgenden Kubikwurzeln? Schreibe mit Hilfe des Zeichens < !
      1) $\sqrt[3]{10}$
      2) $\sqrt[3]{28}$
      3) $\sqrt[3]{60}$
      4) $\sqrt[3]{250}$

2. Berechne mit dem TR! Runde auf zwei Nachkommastellen.
   a. $\sqrt[3]{271}$
   b. $\sqrt[3]{0{,}125}$
   c. $\sqrt[3]{55}$
   d. $\sqrt[3]{17{,}09}$

3. Ein würfelförmiges Aquarium fasst 90 Liter Wasser. Berechne seine Seitenlänge und gib in cm an!

4. Ein Würfel hat eine Kantenlänge von 15 cm. Berechne sein Volumen. Ein zweiter Würfel hat ein nur halb so großes Volumen. Berechne seine Seitenlänge.

5. Wie groß ist die Kantenlänge des Würfels, wenn dieser 3 kg wiegt?

a. Würfel aus Eichenholz ($\varrho = 670\ \mathrm{kg/m^3}$)
b. Würfel aus Glas ($\varrho = 2500\ \mathrm{kg/m^3}$)
c. Würfel aus Platin ($\varrho = 21450\ \mathrm{kg/m^3}$)

6. Auch bei Kubikwurzeln ist Vereinfachen durch partielles Wurzelziehen möglich. Vereinfache folgende Terme.

a. $\sqrt[3]{27a^2}$
b. $\sqrt[3]{x^3y}$
c. $\sqrt[3]{5z^3}$
d. $\sqrt[3]{16b^6}$

7. Verwende die Primfaktorzerlegung, um folgende Kubikwurzeln durch partielles Wurzelziehen zu vereinfachen.

e. $\sqrt[3]{88}$
f. $\sqrt[3]{945}$
g. $\sqrt[3]{864}$

8. Beweise, dass $\sqrt[3]{2}$ irrational ist. Hinweis: Verwende ein ähnliches Argument wie beim Beweis der Irrationalität von Quadratwurzeln.

9. Für Quadratwurzeln gelten die Rechenregeln:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, $\qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$,

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$, $\qquad \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a - b}$.

Formuliere ähnliche Rechenregeln für Kubikwurzeln. Zeige durch Einsetzen von selbst gewählten Zahlen, dass sie tatsächlich stimmen.

Lösungen

1.

a. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343

1) $2 < \sqrt[3]{10} < 3$
2) $3 < \sqrt[3]{28} < 4$
3) $3 < \sqrt[3]{60} < 4$
4) $6 < \sqrt[3]{250} < 7$

2.

a. $\approx 6{,}47$
b. $0{,}5$
c. $\approx 3{,}80$
d. $\approx 2{,}58$

3. Die Seitenlänge beträgt ungefähr 44,8 cm.

4. $\mathrm{V} = 3375\ \mathrm{cm}^3$, Seitenlänge des zweiten Würfels $\mathrm{a} \approx 11{,}9\ \mathrm{cm}$

5. Die Kantenlänge beträgt…

a. $\mathrm{a} \approx 16{,}5\ \mathrm{cm}$.
b. $\mathrm{a} \approx 10{,}6\ \mathrm{cm}$.
c. $\mathrm{a} \approx 5{,}2$ cm.

6. a. $3\sqrt[3]{a^2}$ b. $x\sqrt[3]{y}$ c. $z\sqrt[3]{5}$ d. $2b^2\sqrt[3]{2}$

7. a. $2 \cdot \sqrt[3]{11}$ b. $3 \cdot \sqrt[3]{35}$ c. $6 \cdot \sqrt[3]{4}$

8. Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen, $\sqrt[3]{2}$ wäre rational. Dann wäre $\sqrt[3]{2}$ in Bruchform $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$ und m, n teilerfremd) darstellbar. Durch Kubieren folgt, dass $2n^3 = m^3$. Jede Primzahl, die n teilt, teilt auch die linke Seite $2n^3$ und damit auch die rechte Seite $m^3 = m \cdot m \cdot m$. Wegen der Eigenschaft von Primzahlen (wenn eine Primzahl ein Produkt natürlicher Zahlen teilt, dann teilt sie auch einen der Faktoren) folgt, dass diese Primzahl auch m teilt, ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von m und n.

9. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$, $\qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$,

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \neq \sqrt[3]{a + b}$, $\qquad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \neq \sqrt[3]{a - b}$.