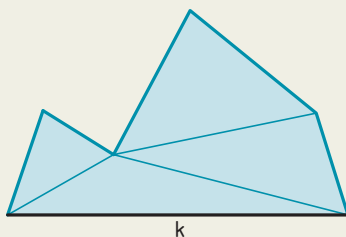
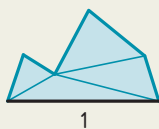
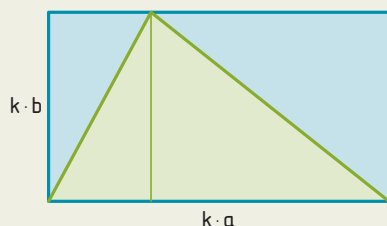
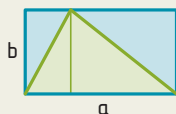


Erweiterung und Vertiefung

Beweisen in der Geometrie

Hippokrates von Chios war ein um 450 v. Chr. lebender griechischer Geometer und Astronom. Von ihm selbst weiß man sehr wenig, doch von seinen mathematischen Leistungen ist uns eine sehr bemerkenswerte überliefert worden.

Bekanntlich errechnet sich der Flächeninhalt eines Rechtecks, indem man die Längen der beiden aufeinander normal stehenden Rechteckseiten multipliziert; der Flächeninhalt eines Dreiecks kann auf eine gleichartige Rechnung zurückgeführt werden. Die Länge einer Seite mit der Länge der zugehörigen Höhe multipliziert, ergibt den doppelten Flächeninhalt.



Hieraus ergibt sich: Wenn man von einem gegebenen Rechteck zu einem ihm ähnlichen Rechteck übergeht, wenn mit anderen Worten sowohl die waagrechte als auch die senkrechte Seite des neuen Rechtecks dadurch entstehen, dass man die Seiten des alten Rechtecks mit dem gleichen Zahlenfaktor k multipliziert, dann erhält man den Flächeninhalt des neuen Rechtecks, indem man den Flächeninhalt des alten Rechtecks mit $k \cdot k = k^2$ multipliziert. Auch für Dreiecke stimmt das. Ist das neue Dreieck dem alten Dreieck ähnlich, sind also die Seiten des neuen Dreiecks die Seiten des alten Dreiecks multipliziert mit dem gleichen Zahlenfaktor k , dann ist der Flächeninhalt des neuen Dreiecks gleich dem des alten Dreiecks multipliziert mit $k \cdot k = k^2$.

Hippokrates errichtete über einer Strecke der Länge 1 als Basis irgendeine Fläche. Welche Form diese Fläche hat, ist unerheblich. Sie kann von einem Streckenzug einer beliebigen Form begrenzt sein. Das Eintragen von Verbindungen zwischen den Ecken trianguliert die Fläche, das heißt, die Fläche wird in lauter Dreiecke zerlegt – triangulum ist lateinisch und heißt „Dreieck“, genauer „Dreiwinkel“.

Über einer Basisstrecke der Länge k errichtete Hippokrates die zur obigen ähnliche Fläche. Die Längen aller begrenzenden Strecken und aller in ihr vorkommenden Verbindungen sind die der ursprünglichen Fläche multipliziert mit dem Faktor k .

Genauso wie bei Rechteck und Dreieck schloss Hippokrates, dass, wenn die alte Fläche den Flächeninhalt F hat, die neue, zu ihr ähnliche Fläche, den Flächeninhalt $k^2 \cdot F$ hat.

Alle diese Gedanken dienten Hippokrates als Vorbereitung für den folgenden Beweis: Einerseits betrachtete er wie oben irgendeine Fläche mit Flächeninhalt F und einer Strecke der Länge 1 als Basis. Andererseits betrachtete er ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Längen a und b und einer Hypotenuse der Länge c . Sowohl über den beiden Katheten als auch über der Hypotenuse errichtete er drei zur gegebenen Fläche mit dem Inhalt F ähnliche Flächen. Ihre Flächeninhalte betragen, wie wir oben festgestellt haben, $a^2 \cdot F$, $b^2 \cdot F$ und $c^2 \cdot F$.

Hippokrates ging von der Voraussetzung aus, dass die über der Hypotenuse errichtete Fläche mit dem Inhalt $c^2 \cdot F$ vollständig innerhalb jenes Bereiches zu liegen kommt, der vom rechtwinkligen Dreieck und den auf den Katheten aufgesetzten Flächen gebildet wird. Denn er beabsichtigte, den Inhalt jener Fläche auszurechnen, die entsteht, wenn man von dem genannten Bereich die über der Hypotenuse errichtete Fläche wegnimmt. Dies gelingt nämlich erstaunlich leicht: Der Flächeninhalt des Bereiches, der vom rechtwinkligen Dreieck und den auf den Katheten aufgesetzten Flächen mit den Inhalten $a^2 \cdot F$ und $b^2 \cdot F$ gebildet wird, beträgt

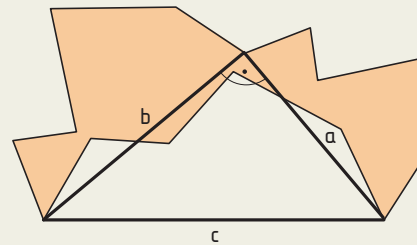
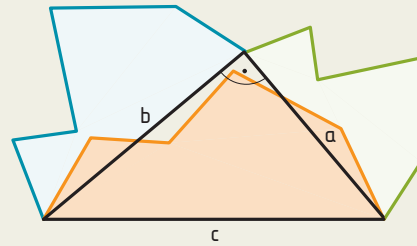
$$A + a^2 \cdot F + b^2 \cdot F,$$

wobei $A = \frac{a \cdot b}{2}$ für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks steht. Und der Inhalt jener Fläche, die man davon subtrahiert, also der über der Hypotenuse c errichteten Fläche, beträgt nach dem Satz des Pythagoras

$$c^2 \cdot F = (a^2 + b^2) \cdot F = a^2 \cdot F + b^2 \cdot F.$$

Hieraus erkannte Hippokrates, dass die verbleibende Restfläche den gleichen Inhalt A wie das gegebene rechtwinklige Dreieck besitzt.

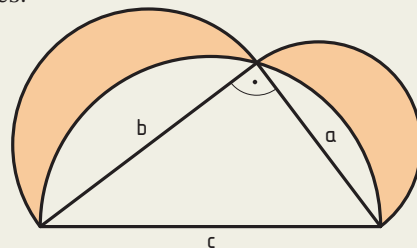
Das Schöne an seinem Beweis ist, dass es auf die spezielle Form der drei einander ähnlichen Flächen überhaupt nicht ankommt. Einzig wesentlich ist nur, dass die über der Hypotenuse errichtete Fläche vollständig innerhalb jenes Bereiches liegt, der vom rechtwinkligen Dreieck und den auf den Katheten aufgesetzten Flächen gebildet wird.



Die Möndchen des Hippokrates

Als besonders beeindruckendes Beispiel betrachtete Hippokrates die Fläche eines Halbkreises. Nach dem Satz von Thales befindet sich, wenn die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Basis des Halbkreises ist, der dritte Eckpunkt des Dreiecks auf der Peripherie, also auf der Randkurve dieses Halbkreises.

Zieht man diese Halbkreisfläche von dem Bereich ab, der vom rechtwinkligen Dreieck und den beiden über den Katheten des Dreiecks errichteten Halbkreisflächen gebildet wird, bleibt eine aus zwei sichelförmigen Flächen bestehende Restfigur übrig. Dieser Figur gab man dem Astronomen Hippokrates zu Ehren den Namen „die Möndchen des Hippokrates“. Seiner obigen Erkenntnis zufolge hat Hippokrates bewiesen, dass der Inhalt seiner beiden „Mondflächen“ zusammen exakt mit dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks übereinstimmt.



Mit Recht nannte Aristoteles Hippokrates einen tüchtigen Geometer. Denn ihm gelang es zum ersten Mal, Inhalte von Flächen zu berechnen, die nicht von geraden, sondern von krummen Linien begrenzt werden. Dieser Erfolg nährte bei den griechischen Mathematikern die Hoffnung, es werde auch gelingen, den Flächeninhalt des Kreises auf eine ähnlich elegante und einfache Weise zu ermitteln. Doch diese Hoffnung erwies sich als trügerisch.

1 Beweisen in der Geometrie

Im Abschnitt E kannst du zu einer „Forscherin“ bzw. einem „Forscher“ im Bereich der Mathematik und speziell der Geometrie werden. Du sollst Probleme **analysieren**, Vermutungen **kritisch hinterfragen** und Zusammenhänge **beweisen**.

Anhand von **mathematischen Problemen** werden jedoch auch **Denk-** und **Verhaltensweisen** geübt und geschult, die im **täglichen Leben** – im privaten wie im beruflichen Bereich – **nützlich und notwendig** sind.

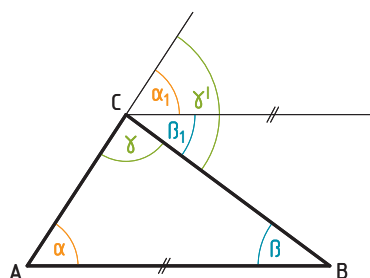
Wir werden im Folgenden unter anderem Sätze beweisen, die du schon in der 2. und 3. Klasse kennen gelernt hast (zB den „Satz von Thales“). Viele dieser Beweise sind im Grunde recht einfach, und doch zeigen derartige **logische Schlüsse** den Kern **mathematischen Denkens**.

Bei Begründungen geht es nicht nur um das Sichern, **dass** die jeweiligen Aussagen gelten, sondern vor allem auch um das Einsehen, **warum** sie gelten. So ist es auch sinnvoll, eine Begründung für etwas zu geben, das man früher schon einmal (anders) begründet hat.

1.1 Allgemeine Dreiecke

Aufgaben

960



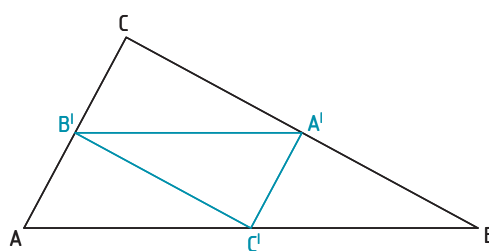
Verwende die Figur links!

- Beweise den Satz über die Winkelsumme im Dreieck! Führe den Beweis und erkläre, warum daraus folgt, dass die Winkelsumme nicht nur in dem hier gezeichneten, sondern in jedem Dreieck 180° ist!
- Beweise den „**Außenwinkelsatz**“: Jeder Außenwinkel ist genau so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

961

„Satz vom Mittendreieck“

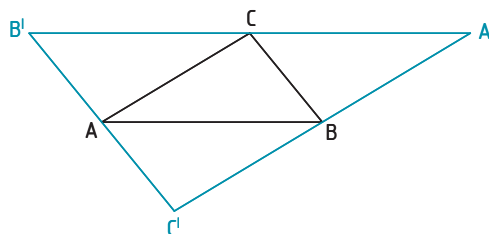
In jedem Dreieck ABC sind die Seiten des Mittendreiecks $A'B'C'$ halb so lang wie die entsprechenden Seiten des Ausgangsdreiecks und parallel dazu ($\rightarrow$ Figur rechts). Beweise diesen Satz!



962

„Satz vom parallelen Umdreieck“

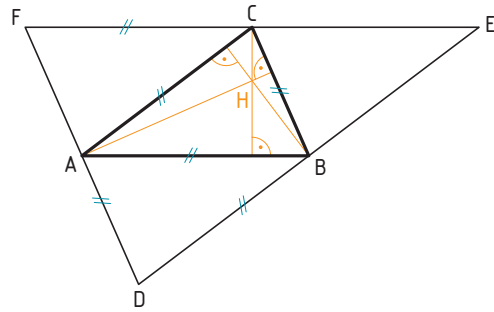
Zieht man durch die Eckpunkte eines Dreiecks ABC Parallele zu den jeweils gegenüberliegenden Seiten, so entsteht ein Dreieck $A'B'C'$ mit gleichen Winkeln und doppelt so langen Seiten wie das Ausgangsdreieck ABC . Beweise diese Behauptung!



963

Beweise, dass die drei **Seitensymmetralen** einander in jedem Dreieck in einem gemeinsamen Punkt schneiden! Dieser Punkt ist Mittelpunkt jenes Kreises, der durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks verläuft (**Umkreis** des Dreiecks).

- 964** Beweise mit Hilfe der Figur rechts, dass die drei **Höhenlinien** einander in jedem Dreieck in einem gemeinsamen Punkt, dem **Höhenschnittpunkt H**, schneiden!



- + 965** Beweise, dass die drei Schwerlinien eines beliebigen Dreiecks einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden! Gehe in drei Schritten vor (→ Figuren rechts):

- 1)** Zeige: Wenn **P** auf der Schwerlinie s_c liegt, dann sind die Flächeninhalte der gefärbten Dreiecke gleich ($A_1 = A_2$)!

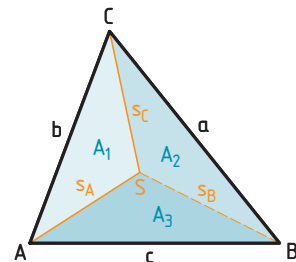
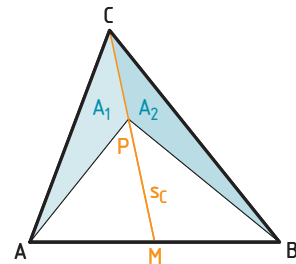
Hinweis: Warum sind die Dreiecke **AMC** und **MBC** flächengleich? Wieso folgt daraus $A_1 = A_2$?

- 2)** Zeige auch die Umkehrung: Wenn $A_1 = A_2$ gilt, dann muss **P** auf der Schwerlinie s_c liegen.

Hinweis: Die beiden Dreiecke haben die Seite **CP** gemeinsam; auf Grund der Flächengleichheit müssen sie auch die gleiche zugehörige Höhe haben. Begründe damit, dass dann die Verlängerung von **CP** die Seite **AB** halbieren muss!

- 3)** Benütze die Aufgaben 1) und 2) um zu zeigen, dass die Schwerlinien in einem Dreieck einander in einem Punkt schneiden!

Hinweis: **S** sei der Schnittpunkt von s_c und s_a . Wegen 1) muss dann $A_1 = A_2$ und $A_1 = A_3$ gelten.



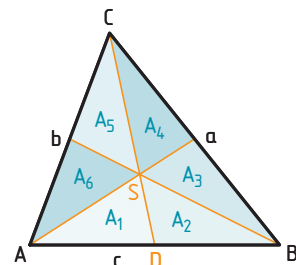
- + 966** **S** sei der Schwerpunkt im Dreieck **ABC** (→ Figur rechts).

- 1)** Zeige, dass die sechs Teildreiecke, die von den Schwerlinien gebildet werden, alle flächengleich sind!

Hinweis: Verwende Teil 1) von Aufgabe 965!

- 2)** Begründe damit, dass der Schwerpunkt **S** die Schwerlinien im Verhältnis **2 : 1** teilt.

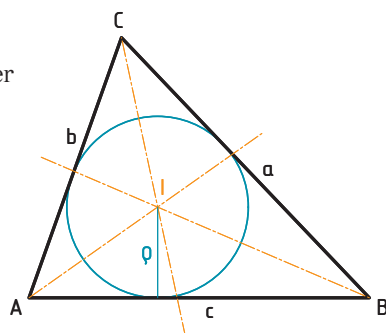
Hinweis: Das Dreieck **ASC** ist doppelt so groß wie das Dreieck **ADS** und beide haben dieselbe Höhe durch **A**.



- 967** Beweise, dass die drei **Winkelsymmetralen** einander in jedem Dreieck in einem gemeinsamen Punkt schneiden (→ Figur rechts)! Dieser Punkt ist Mittelpunkt des Kreises, der alle drei Seiten des Dreiecks berührt (**Inkreis** des Dreiecks).

- 968** Zeige, dass für den Inkreisradius ρ jedes beliebigen Dreiecks die Formel $\rho = \frac{2 \cdot A_{\Delta}}{u}$ gilt!

Hinweis: Die Winkelsymmetralen teilen das Dreieck **ABC** in die drei Teildreiecke $\triangle ABI$, $\triangle BCI$ und $\triangle CAI$. Es gilt also $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle ABI} + A_{\triangle BCI} + A_{\triangle CAI}$. In jedem dieser Teildreiecke ist eine der Höhen genau so lang wie der Inkreisradius ρ .



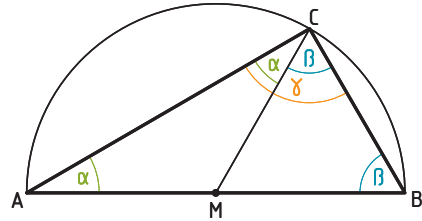
1.2 Besondere Dreiecke

Aufgaben

969 **Satz von Thales:** „Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.“

- 1) Formuliere diesen Lehrsatz exakter! Was ist mit „Winkel im Halbkreis“ gemeint?
- 2) Beweise die Richtigkeit des Lehrsatzes mit Hilfe der Figur rechts!

Anleitung: Die Dreiecke AMC und MBC sind gleichschenkelig. Die Winkelsumme im Dreieck ABC beträgt 180° .



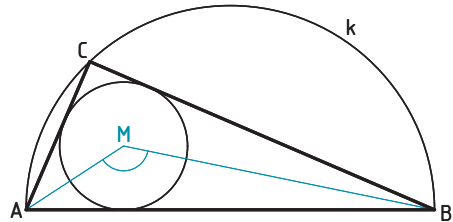
970 Begründe: Die Schwerlinie s_c muss in jedem rechtwinkligen Dreieck (mit $\gamma = 90^\circ$) halb so lang wie die Seite c sein!

971 Zeichne eine beliebige Strecke AB ! Wo muss der Punkt C liegen, damit das Dreieck ABC beim Punkt C einen 1) rechten, 2) spitzen, 3) stumpfen Winkel hat? Zeichne das Dreieck!

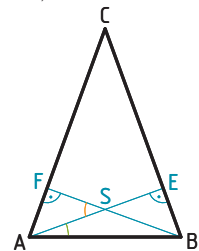
972 Über der Strecke AB ist ein Halbkreis k errichtet. Der Punkt C ist ein beliebiger Punkt dieses Halbkreises (verschieden von A und B). Der Punkt M ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ($\rightarrow$ Figur rechts).

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Gib Argumente für deine Entscheidung an!

- ☐ Die Größe von $\sphericalangle AMB$ ändert sich, wenn sich C auf k bewegt.
- ☐ Die Größe von $\sphericalangle AMB$ bleibt für jede Lage von C gleich; man kann sie aber, ohne den Radius zu kennen, nicht berechnen.
- ☐ $\sphericalangle AMB = 135^\circ$ für alle C .
- ☐ $\sphericalangle AMB = 145^\circ$ für alle C .



973 Im Dreieck ABC schneiden einander die Höhe h_a und die Höhe h_b im Punkt S ($\rightarrow$ Figur rechts). Der Winkel $\sphericalangle FSA$ hat 40° , der Winkel $\sphericalangle SAB$ hat 20° . Beweise, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist!



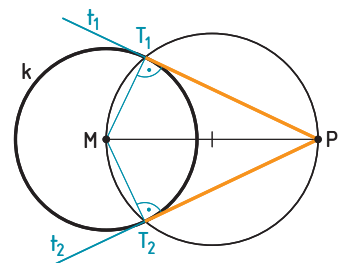
974 Ein Dreieck ABC ist rechtwinklig-gleichschenkelig ($\gamma = 90^\circ$). Kreuze die zwei richtigen Feststellungen an und begründe deine Antwort! Wenn CE eine Seitensymmetrale ist, dann gilt:

- ☐ $\overline{CE} = \overline{CA}$ ☐ $\overline{CE} = \overline{CB}$ ☐ $\overline{CE} = \overline{AE}$ ☐ $\overline{CE} = \overline{AB}$ ☐ $\overline{CE} = \overline{EB}$

975 Einem Kreis ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC so eingeschrieben, dass dessen Hypotenuse AB genau so lang ist wie der Durchmesser des Kreises. Wenn $\alpha = 30^\circ$ ist, dann ist die Seite BC dieses Dreiecks genau so lang wie der Radius des Kreises! Begründe diese Behauptung!

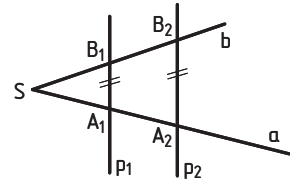
976 Zeichne einen Kreis k und einen Punkt P außerhalb des Kreises! Lege von P aus die Tangenten an den Kreis ($\rightarrow$ Figur rechts)! Beweise, dass die Tangentenstrecken PT_1 und PT_2 gleich lang sind!

Anleitung: Um den genauen Berührungspunkt der Tangente zu erhalten, schneide den Thales-Kreis (Strecke PM als Durchmesser) mit dem Kreis k ! Begründe diese Vorgangsweise!



1.3 Strahlensatz

Werden zwei Strahlen a und b mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S von zwei parallelen Geraden p_1 und p_2 geschnitten, so gilt der **Strahlensatz**.



1. Strahlensatz

Die Längen zweier Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

$$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SB_1}{SB_2}$$

2. Strahlensatz

Die Abschnitte auf den parallelen Geraden verhalten sich wie die entsprechenden, von S ausgehenden Abschnitte auf jedem der beiden Strahlen.

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{SA_1}{SA_2} \\ \frac{SB_1}{SB_2} \end{array} \right.$$

Aufgaben

+ 977 Umkehrung des 1. Strahlensatzes

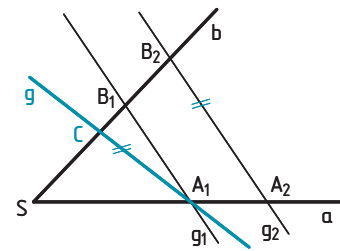
Wenn sich die Längen der Abschnitte auf dem einen Strahl so wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf dem zweiten Strahl verhalten, dann sind die Geraden, die die beiden Strahlen schneiden, parallel zueinander. Schreibe den im Folgenden angeführten Beweis dieser Umkehrung in eigenen Worten auf!

Voraussetzung: $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$ ($\rightarrow$ Figur rechts)

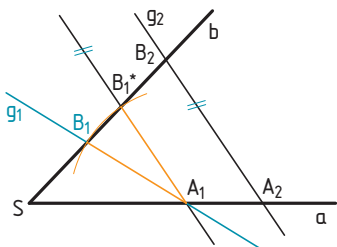
Zu zeigen ist: $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ bzw. $g_1 \parallel g_2$

Beweis: Sei g eine Parallele zu g_2 durch A_1 und $g \cap b = \{C\}$. Dann muss auf Grund des 1. Strahlensatzes $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SC} : \overline{SB_2}$ gelten.

Daraus folgt: $C = B_1$ und $g = g_1$ und weiters $g_1 \parallel g_2$.



+ 978



1) Formuliere in eigenen Worten eine mögliche **Umkehrung** des **2. Strahlensatzes**!

2) Zeige mit Hilfe der Figur links, dass diese Umkehrung **nicht** gilt!

Hinweis: Obwohl $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2}$ gilt (weil $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1B_1^*}$), ist hier nicht $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ bzw. $g_1 \parallel g_2$.

+ 979

In der 3. Klasse haben wir gezeigt: Wenn zwei **Dreiecke** in ihren Winkeln übereinstimmen, so sind sie **ähnlich**, dh. alle Seitenlängen stehen im selben Verhältnis. Nun können wir auch zeigen: Wenn in zwei Dreiecken die Verhältnisse entsprechender Seitenlängen übereinstimmen, so sind sie ähnlich, dh. ihre Winkel stimmen überein.

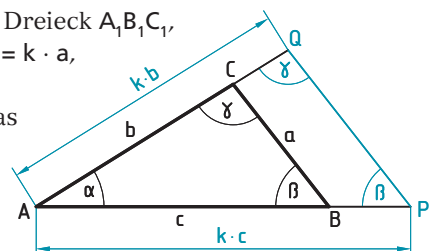
1) Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und ein zweites Dreieck $A_1B_1C_1$, dessen Seitenlängen ein beliebiges k -faches sind: $a_1 = k \cdot a$, $b_1 = k \cdot b$, $c_1 = k \cdot c$; Winkel: α_1 , β_1 , γ_1

2) Verlängere im Dreieck ABC die Seiten b und c auf das k -fache! Du erhältst die Punkte P und Q ($\rightarrow$ Figur).

3) Begründe mit Hilfe der Umkehrung des 1. Strahlensatzes, dass $PQ \parallel BC$ ist!

4) Begründe mit Hilfe des 2. Strahlensatzes: $\overline{PQ} = k \cdot a$

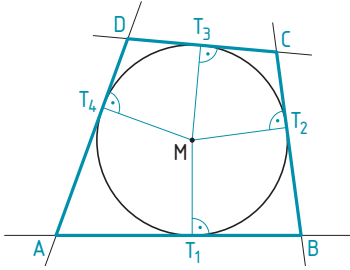
5) Warum sind die Dreiecke APQ und $A_1B_1C_1$ also kongruent?



1.4 Vierecke und Vielecke

Aufgaben

980



Zeichne einen Kreis und lege ihm vier Tangenten so an, dass ein so genanntes **Tangentenviereck** entsteht (→ Figur links)!

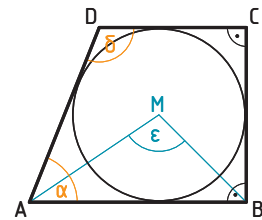
Alle Vierecke mit Inkreis sind demnach Tangentenvierecke.

- a)** Gib einige besondere Tangentenvierecke an!
b) Beweise, dass in jedem Tangentenviereck ABCD
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$ gilt!

Beachte: Es gilt zB: $\overline{AT_1} = \overline{AT_4}$ (→ Aufgabe 976)

981

Das Trapez ABCD ($\beta = \gamma = 90^\circ$) besitzt einen Inkreis, von dem der Zentriwinkel $\varepsilon = \angle AMB = 101^\circ$ bekannt ist (→ Figur rechts). Wie groß sind demnach α und δ ? Begründe deine Antwort!



982

Begründe die Aussagen mit Hilfe einer Skizze in eigenen Worten!

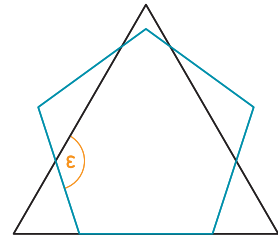
- 1)** Wenn in einem Viereck ABCD die Winkel $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 140^\circ$ und $\delta = 100^\circ$ sind, dann ist das Viereck ein Trapez.
2) Wenn in diesem Viereck außerdem $b = c$ gilt, dann gilt auch $f = BD = a$!



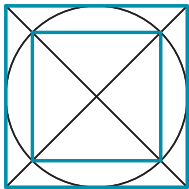
983

Die Figur rechts zeigt ein gleichseitiges Dreieck und ein regelmäßiges Fünfeck. Wie groß ist der Winkel ε ? Begründe!

- ☐ 124° ☐ 128° ☐ 132° ☐ 136° ☐ 140°



984



Der Flächeninhalt des großen Quadrats ist um 32 cm^2 größer als der des kleinen Quadrats (→ Figur links).
 Berechne die Seitenlänge des großen Quadrats!

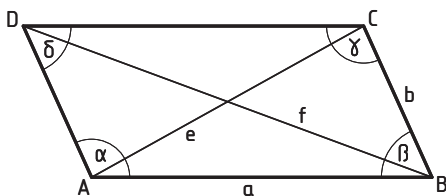
985

Welche Eigenschaft der Diagonalen e und f eines Vierecks ist notwendig, damit man seinen Flächeninhalt mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ berechnen kann?

- ☐ Die Diagonalen sind gleich lang.
☐ Die Diagonalen halbieren einander.
☐ Die Diagonalen bilden einen rechten Winkel.
☐ Wenigstens eine Diagonale ist Symmetrale des Vierecks.

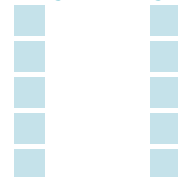
986

Gib an, ob die Aussage für Parallelogramme ABCD richtig oder im Allgemeinen falsch ist!



- $\alpha = \gamma$
 $\alpha + \delta = 180^\circ$
 $e \perp f$
 ABCD hat einen Umkreis
 e und f halbieren einander

richtig im Allg. falsch



1.5 Kreissehnen

Aufgaben

987

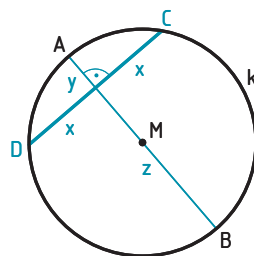
Zeichne einen Kreis k mit einem Durchmesser AB und errichte eine normal zum Durchmesser stehende Sehne CD ($\rightarrow$ Figur rechts)!

a) Beweise, dass die Sehne vom Durchmesser halbiert wird!

+

b) Benenne die Abschnitte auf Sehne und Durchmesser so wie in der Figur! Beweise, dass der Zusammenhang $x^2 = y \cdot z$ gilt!

Anleitung: Fasse den Durchmesser AB als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks auf! Der Kreis entspricht dann dem Thales-Kreis und der Sehnenabschnitt x der Dreieckshöhe auf die Hypotenuse.



Die Aufwölbung von Seen

Auf Grund der **Kugelgestalt der Erde** sind die Oberflächen von Seen – und natürlich auch die der Meere – nicht wirklich eben, sondern gekrümmt. Sie weisen eine so genannte **Aufwölbung** auf.

In der Figur unten rechts ist ein See mit s km „Länge“ und einer mit h bezeichneten Aufwölbung vereinfacht dargestellt. Mit Hilfe der in Aufgabe 987 bewiesenen Formel lässt sich die Aufwölbung folgendermaßen berechnen:

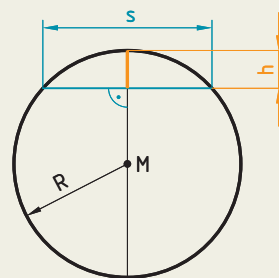
$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = h \cdot (2R - h)$$

$$\frac{s^2}{4} = h \cdot 2R - h^2$$

Da die Aufwölbung h im Verhältnis zum **Erdradius** R (etwa 6370 km) sehr klein ist, kann man in dieser Formel h^2 vernachlässigen.

Für die **Aufwölbung h** (in Kilometer) **eines s km langen Sees** ergibt sich demnach folgende Näherungsformel:

$$h \approx \frac{s^2}{8R} \approx \frac{s^2}{50000}$$



988

Verwendet den Informationstext und berechnet die Aufwölbung der angegebenen Seen!

Beispiel Ossiacher See (Kärnten): $s \approx 10$ km

$$h \approx \frac{s^2}{50000}$$

$$\frac{100}{50000} = \frac{1}{500} = 0,002$$

$h \approx 0,002$ km = 2 m

Die Aufwölbung des Ossiachersees beträgt **rund 2 m**.

a) Erlaufsee (Niederösterreich): $s \approx 2$ km

b) Zeller See (Salzburg): $s \approx 4$ km

c) Grundlsee (Steiermark): $s \approx 6$ km

d) Achensee (Tirol): $s \approx 9$ km

e) Wörthersee (Kärnten): $s \approx 16$ km

f) Attersee (Oberösterreich): $s \approx 20$ km

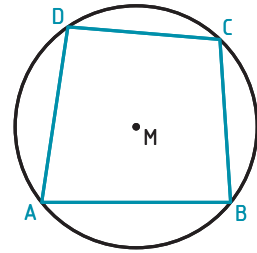
g) Neusiedler See (Burgenland): $s \approx 30$ km

h) Bodensee (Vorarlberg): $s \approx 65$ km

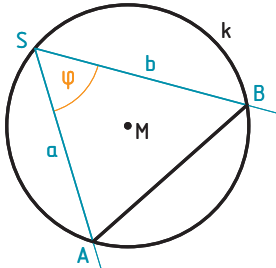
2 Peripheriewinkel

Sehnenvierecke

Zeichne in einen Kreis vier Sehnen so ein, dass ein Viereck entsteht! Du erhältst ein so genanntes **Sehnenviereck** ($\rightarrow$ Figur rechts). Jedes **Viereck**, das einen **Umkreis** besitzt, ist demnach ein **Sehnenviereck**.



Peripheriewinkel



Die Winkel des Sehnenvierecks haben ihre Scheitel auf der Kreislinie, dem Rand der Kreisfläche.

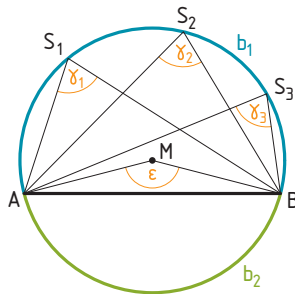
Ein **Winkel**, dessen **Scheitel auf einem Kreis** liegt und dessen **Schenkel durch die Endpunkte einer Sehne** dieses Kreises gehen, heißt **Peripheriewinkel (Randwinkel)**.

In der Figur links ist der Peripheriewinkel φ mit dem Scheitel S und den Schenkeln a und b dargestellt. Die zugehörige Sehne ist AB.

Peripheriewinkelsatz

Zeichne einen Kreis k und eine Sehne AB dieses Kreises, die kein Durchmesser ist, in dein Heft! Die Punkte A und B begrenzen dabei einen längeren Bogen b_1 und einen kürzeren Bogen b_2 ($\rightarrow$ Figuren unten).

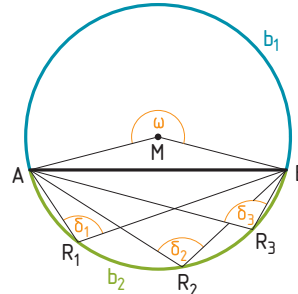
Nimm auf dem (längeren) Bogen b_1 mehrere Punkte $S_1, S_2, S_3 \dots$ an!



Zeichne die Winkel $\gamma_1 = \angle AS_1B$, $\gamma_2 = \angle AS_2B$, $\gamma_3 = \angle AS_3B \dots$ und miss sie! Miss auch den **Zentriwinkel** $\varepsilon = \angle AMB$ und vergleiche ihn mit den Winkeln $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$!

Versuche, auf Grund deiner Messungen eine Vermutung aufzuschreiben, wie die Größen der Peripheriewinkel und die Größe des zugehörigen Zentriwinkels zusammenhängen!

Nimm auf dem (kürzeren) Bogen b_2 mehrere Punkte $R_1, R_2, R_3 \dots$ an!



Zeichne die Winkel $\delta_1 = \angle AR_1B$, $\delta_2 = \angle AR_2B$, $\delta_3 = \angle AR_3B \dots$ und miss sie! Miss auch den erhabenen **Zentriwinkel** $\omega = \angle AMB$ und vergleiche ihn mit den Winkeln $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$!

Peripheriewinkelsatz

Peripheriewinkel über der Sehne AB, die ihre Scheitel auf **demselben Kreisbogen b** haben, sind **gleich groß**. Sie sind **halb so groß** wie der zu dieser Sehne gehörende **Zentriwinkel**.

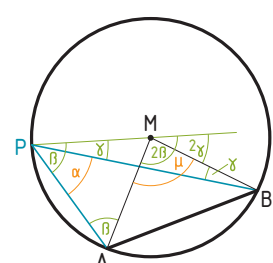
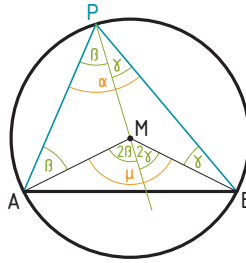
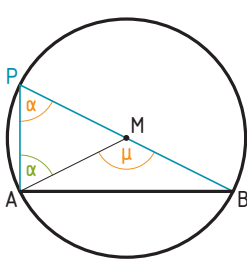
Darüber hinaus gilt:

Zwei Peripheriewinkel, die ihre Scheitel auf den zur Sehne AB gehörenden **verschiedenen Kreisbogen** b_1 und b_2 haben, **ergänzen einander auf 180°** ($\rightarrow$ Aufgabe 990).

Beweis für den Peripheriewinkelsatz

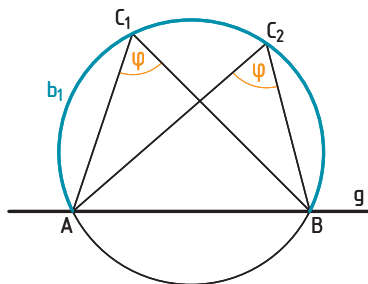
Wir zeigen, dass ein Peripheriewinkel immer halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel. Damit ist dann auch gezeigt, dass die entsprechenden Peripheriewinkel untereinander alle gleich groß sind. Der **Beweis** gliedert sich in drei Fälle. (**Fallunterscheidungen** sind ein wichtiges Prinzip in der Mathematik, speziell beim Begründen.)

- 1) Der Mittelpunkt M liegt auf einem der Schenkel des Peripheriewinkels, z.B. auf PB ($\rightarrow$ Figur unten links). Das Dreieck AMP ist dann gleichschenkelig ($\overline{AM} = \overline{MP}$). Der Peripheriewinkel $\alpha = \sphericalangle APB = \sphericalangle APM$ ist daher gleich groß wie $\sphericalangle PAM$. Nach dem Satz vom Außenwinkel gilt für den Zentriwinkel: $\mu = 2\alpha$



- 2) M liegt innerhalb des Winkelfeldes von $\alpha = \sphericalangle APB$ ($\rightarrow$ Figur oben Mitte). Dann zerlegt PM den Peripheriewinkel α in eine Summe zweier Winkel ($\alpha = \beta + \gamma$). Die Dreiecke AMP und BMP sind gleichschenkelig. Mit zweimaliger Anwendung derselben Schlussweise wie im 1. Fall (Satz vom Außenwinkel) folgt für den Zentriwinkel: $\mu = 2\beta + 2\gamma = 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$
- 3) M liegt außerhalb des Winkelfeldes von $\alpha = \sphericalangle APB$ ($\rightarrow$ Figur oben rechts). Bezeichne die Winkel $\sphericalangle MPA = \sphericalangle MAP$ mit β und $\sphericalangle MPB = \sphericalangle MBP$ mit γ ! Dann ist $\alpha = \beta - \gamma$, und wie im 2. Fall folgt $\mu = 2\beta - 2\gamma = 2(\beta - \gamma) = 2\alpha$.

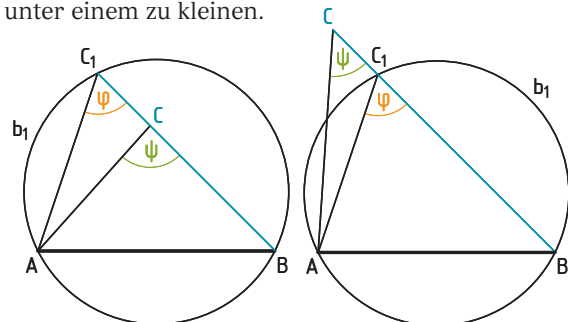
„Umkehrung“ des Peripheriewinkelsatzes



Der Peripheriewinkelsatz besagt, dass alle Punkte auf b_1 Scheitel gleich großer Peripheriewinkel über der Sehne AB sind. Von allen diesen Punkten sieht man also die Sehne unter dem Winkel φ ($\rightarrow$ Figur links). Gewissermaßen eine **Umkehrung** des Peripheriewinkelsatzes besagt: Wenn man von einem Punkt oberhalb der Geraden durch A und B die Strecke AB unter dem Winkel φ sieht, dann muss dieser Punkt auf dem Kreisbogen b_1 liegen.

Begründung: Von Punkten innerhalb des Bogens b_1 sieht man die Sehne AB unter einem zu großen **Schwinkel**, von Punkten außerhalb unter einem zu kleinen.

Um dies einzusehen, nehmen wir einen Punkt C beliebig an und verbinden diesen Punkt C mit dem einen Endpunkt B der Sehne. Schneidet man die Gerade durch B und C mit dem Kreisbogen b_1 , so erhält man den Punkt C_1 . Da C_1 auf b_1 liegt, muss der Peripheriewinkel mit C_1 als Scheitel die Größe von φ haben ($\rightarrow$ Figuren rechts).

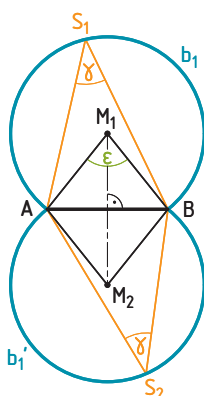
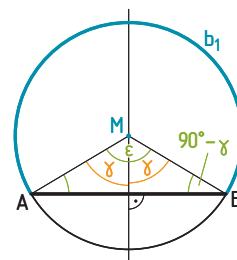


Der Winkel ψ beim beliebig angenommenen Punkt C muss dann wegen des **Außenwinkelsatzes** ($\rightarrow$ Seite 230) im $\triangle ACC_1$ (bzw. $\triangle AC_1C$) größer bzw. kleiner als φ sein, je nachdem, ob C innerhalb oder außerhalb des Kreisbogens oberhalb der Sehne AB liegt.

Sehwinkel

Es stellt sich die Frage, wie man **alle Punkte** finden kann, von denen aus man eine gegebene Strecke AB unter einem **bestimmten Sehwinkel** γ sehen kann.

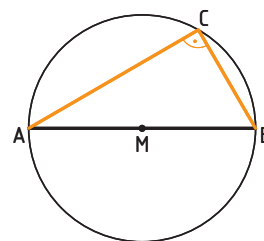
Wir müssen zur Strecke AB zunächst jenen Punkt M finden, der Scheitel des Zentriwinkels $\varepsilon = 2\gamma$ ist ($\rightarrow$ Musterbeispiel Seite 239). Dieser Punkt ist dann Mittelpunkt des Kreisbogens, von dem aus die Strecke AB unter dem Sehwinkel γ erscheint ($\rightarrow$ Figur rechts).



Wegen der „Umkehrung“ des Peripheriewinkelsatzes gibt es außer auf dem Kreisbogen b_1 keine weiteren Punkte oberhalb der Geraden durch A und B , von denen aus die Strecke AB unter dem Sehwinkel γ erscheint.

Überlege aber: Spiegelt man den Peripheriewinkelbogen b_1 an der Strecke AB , so erhält man einen zweiten Bogen b_1' ($\rightarrow$ Figur links). Auf diesem **Kreisbogenpaar b_1 und b_1'** befinden sich dann **alle Punkte der Zeichenebene**, von denen aus die **Strecke AB unter dem Winkel γ zu sehen ist** (ausgenommen die Punkte A und B selbst).

Entsprechend dem **Peripheriewinkelsatz** sind alle Winkel, deren Schenkel durch die Endpunkte einer Kreissehne AB gehen und die ihre Scheitel auf demselben Kreisbogen haben, gleich groß und halb so groß wie der zur Sehne gehörende Zentriwinkel. Begründe damit, dass der **Satz von Thales** ($\rightarrow$ Figur rechts) „nur“ ein **Sonderfall des Peripheriewinkelsatzes** ist ($\rightarrow$ Aufgabe 998)!



Aufgaben

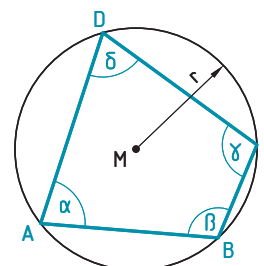
989 Jedes Viereck, das einen Umkreis besitzt, ist ein **Sehnenviereck** ($\rightarrow$ Figur rechts unten).

1) Erkläre diesen Sachverhalt!

2) Gib einige besondere Sehnenvierecke an!

+ 990 Beweise, dass in jedem Sehnenviereck die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln stets 180° ist!

Anleitung: Zeichne im Viereck $ABCD$ zB die Strecke AC ein und fasse die Winkel β und δ als Peripheriewinkel über derselben Sehne auf ($\rightarrow$ Figur rechts)!



991 Konstruiere ein Sehnenviereck $ABCD$!

a) $r = 4 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$, $\alpha = 120^\circ$, $\delta = 105^\circ$

b) $\overline{AB} = 5,8 \text{ cm}$, $\overline{AD} = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 85^\circ$

Anleitung zu b): Zeichne zuerst das Dreieck ABD und seinen Umkreis!

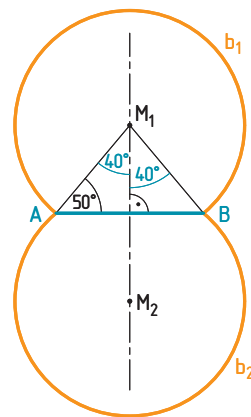
992 Eine Diagonale eines Vierecks, das einen Umkreis besitzt, verläuft durch den Mittelpunkt des Umkreises. Der kleinste Winkel in diesem Viereck ist 81° groß. Wie groß sind die anderen drei Winkel des Vierecks? Fertige eine Skizze an!

993, 994: Ermittle alle jene Punkte, von denen aus die Strecke AB unter dem gegebenen Sehwinkel γ erscheint!

Beispiel $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$; $\gamma = 40^\circ$

Überlege für die **Konstruktion** ($\rightarrow$ Figur rechts):

1. Zu einem Sehwinkel von $\gamma = 40^\circ$ gehört ein Zentriwinkel von $\varepsilon = 80^\circ$.
2. Die Mittelpunkte M_1 und M_2 der zugehörigen Kreisbögen liegen auf der Streckensymmetrale s_{AB} .
3. Der Winkel $\angle BAM_1$ muss zum Sehwinkel γ komplementär sein:
 $\angle BAM_1 = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$
4. Den Mittelpunkt M_2 erhältst du durch Spiegelung.



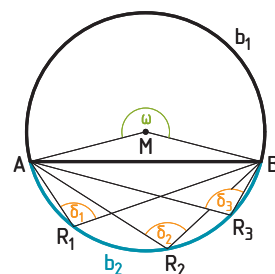
993 Gegeben ist eine Strecke AB mit $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$.

- a)** $\gamma = 20^\circ$ **b)** $\gamma = 30^\circ$ **c)** $\gamma = 50^\circ$ **d)** $\gamma = 60^\circ$ **e)** $\gamma = 75^\circ$ **f)** $\gamma = 90^\circ$

+ 994 Gegeben ist eine Strecke AB mit $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$.

- a)** $\delta = 100^\circ$ **b)** $\delta = 120^\circ$ **c)** $\delta = 140^\circ$ **d)** $\delta = 150^\circ$

Überlege: Punkte, von denen aus man eine Strecke unter einem stumpfen Winkel sieht, müssen auf dem kleineren Kreisbogen b_2 liegen ($\rightarrow$ Figur rechts).



+ 995 Konstruiere in einem Dreieck ABC jenen Punkt, von dem aus alle drei Seiten unter dem gleichen Winkel erscheinen!

- 1) Zeichne dazu ein beliebiges Dreieck, in dem alle Winkel kleiner als 120° sind, und nimm in diesem Dreieck einen Punkt P an!
- 2) Stelle die drei Sehwinkel fest, unter denen man die Dreiecksseiten vom Punkt P aus sieht!
- 3) Überlege, wie groß die Sehwinkel sein müssten, wenn sie alle drei gleich groß sein sollen!
- 4) Wo müssen daher die Mittelpunkte der drei Kreisbögen liegen ($\rightarrow$ Aufgabe 994)?
- 5) Wie groß müssen die zugehörigen Zentriwinkel sein?
- 6) Beschreibe in eigenen Worten, wo jener Punkt liegen müsste, von dem aus die drei Dreiecksseiten unter dem gleichen Sehwinkel erscheinen!
- 7) Konstruiere diesen Punkt in deinem Dreieck ABC!

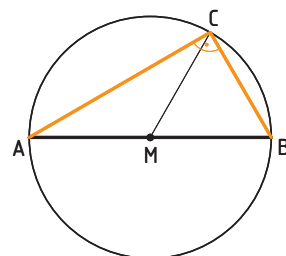
Bemerkung: Dieser Punkt heißt auch Fermat-Punkt (Pierre de Fermat, französischer Mathematiker, 1607–1665) oder Torricelli-Punkt (Evangelista Torricelli, italienischer Mathematiker und Physiker, 1608–1647). Für diesen Punkt P ist die Summe der Abstände $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ minimal.

+ 996 Konstruiere die Lage jenes Punktes des gegebenen Dreiecks ABC, von dem aus die drei Seiten unter gleichem Winkel erscheinen ($\rightarrow$ Aufgabe 995)!

- a)** $a = 8,5 \text{ cm}$, $b = 5,5 \text{ cm}$, $c = 8,0 \text{ cm}$ **b)** $a = 6,1 \text{ cm}$, $b = 9,0 \text{ cm}$, $c = 8,2 \text{ cm}$

+ 997 Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $a = 60 \text{ mm}$! Konstruiere unter Beibehaltung der Basis AB ein flächengleiches Dreieck mit dem gegebenen Winkel γ (zwei Lösungen)!

- a)** $\gamma = 30^\circ$ **b)** $\gamma = 40^\circ$ **c)** $\gamma = 50^\circ$ **d)** $\gamma = 20^\circ$ **e)** $\gamma = 48^\circ$



998 Begründe, wieso der Satz von Thales ein Sonderfall des Peripheriewinkelsatzes ist! Wo befindet sich der zugehörige Zentriwinkel und wie groß ist er?

3 Ellipse

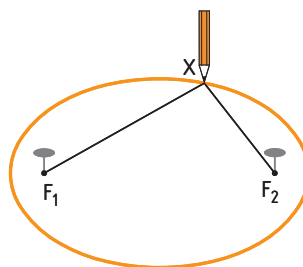


Johannes Kepler (1571–1630)

David und Lukas stellen sich die Frage, ob man solche Ellipsen wie Kreise mit dem Zirkel zeichnen kann.

Gärtnerkonstruktion

Du kannst eine Ellipse zeichnen, indem du auf einem Zeichenblatt zwei Punkte markierst, die du mit F_1 und F_2 bezeichnest! Befestige in diesen zwei Punkten mit Hilfe von Stecknadeln oder Reißnägeln einen Faden, der länger als die Strecke F_1F_2 ist! Lässt du nun einen Bleistift längs des gespannten Fadens über das Zeichenblatt gleiten, so beschreibt er eine **Ellipse** (→ Figur rechts).



Diese Konstruktion wird auch „**Gärtnerkonstruktion**“ genannt, weil auf diese Art und Weise zB in Parks elliptische Beete angezeichnet werden können. Statt Reißnägeln werden Pflöcke in den Boden gerammt und daran feste Schnüre angebracht.

Du weißt sicher, dass man auf ähnliche Weise mit Hilfe **eines** Pflöckes und einer gespannten Schnur **Kreise** erzeugen kann.

Experimentiere mit der Form der Ellipse, indem du die Fadenlänge abänderst! Beschreibe, wie sich die Gestalt der Ellipse ändert!

Lass nun die Fadenlänge gleich, ändere aber die Länge der Strecke F_1F_2 ! Was fällt dir auf?

Ellipse als Punktmenge

Aus der Figur oben kannst du erkennen:

In jedem Punkt X der Ellipse ist die Summe der Streckenlängen $\overline{XF_1}$ und $\overline{XF_2}$ immer gleich groß, da sich die Gesamtlänge des Fadens während des „Zeichnens“ nicht ändert, wenn der Faden gespannt bleibt.

Üblicherweise bezeichnet man diese gleichbleibende Summe der Strecken mit $2a$.

Ellipse

Die **Ellipse** ist die **Menge aller Punkte** der Zeichenebene, für die die **Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2** den **konstanten Wert $2a$** hat.

Die zwei festen Punkte F_1 und F_2 nennt man die **Brennpunkte** der Ellipse.

Für **jeden Punkt X der Ellipse** gilt also: $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a$

Bemerkung: Der Buchstabe F kommt hier von „focus“ (lat.) ... Feuerstätte, Brennpunkt

Bezeichnungen

Die Strecke $\overline{AB}$, die auf der Geraden durch F_1 und F_2 liegt, heißt **Hauptachse der Ellipse** ($\rightarrow$ Figur rechts).

Die Ellipsenpunkte **A** und **B** heißen **Hauptscheitel**, sie sind am weitesten vom Mittelpunkt **M** der Ellipse entfernt. Für ihren Abstand gilt: $\overline{AB} = 2a$

Die Strecke $\overline{CD}$, die normal auf $\overline{AB}$ steht und durch **M** geht, heißt **Nebenachse**. Die Punkte **C** und **D** sind die **Nebenscheitel** der Ellipse, sie liegen **M** am nächsten.

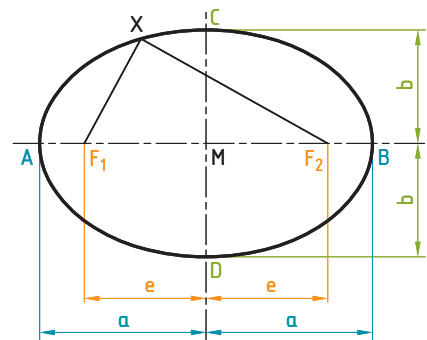
Folgende weitere Bezeichnungen sind üblich:

$\overline{MA} = \overline{MB} = a$... Länge der halben Hauptachse

$\overline{MC} = \overline{MD} = b$... Länge der halben Nebenachse

$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e$... lineare Exzentrizität

Bemerkung: ex centro (lat.) ... aus der Mitte

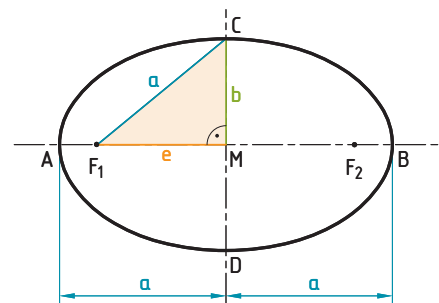


Zusammenhang zwischen den Achsen

Haupt- und Nebenachse der Ellipse sind auch **Symmetrieachsen**. Die Ellipse ist **zweifach axial-symmetrisch**.

Aus der Symmetrie ergibt sich $\overline{CF_1} = \overline{CF_2}$. Begründe damit, dass $\overline{CF_1} = a$ gilt!

Aus dem rechtwinkligen Dreieck F_1MC ergibt sich folgender Zusammenhang ($\rightarrow$ Figur rechts):



Lineare Exzentrizität

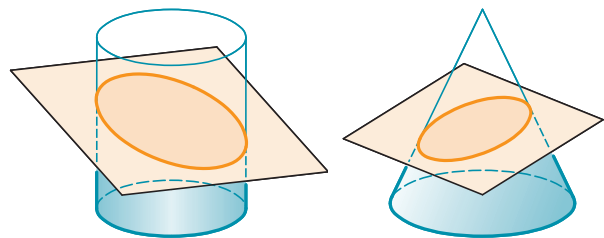
Für die Längen der **Halbachsen a** und **b** und die **lineare Exzentrizität e** gilt: $e^2 = a^2 - b^2$

Überlege und begründe: Je kleiner e ist, umso näher rücken die Brennpunkte zusammen. Ist $e = 0$, dann gilt $F_1 = F_2 = M$ und $a = b$. Die Ellipse wird zum **Kreis**. Der Kreis ist also ein Spezialfall der Ellipse.

Ellipsen bei Schnittflächen

Schneidet man einen **Drehzylinder** oder einen **Drehkegel** schräg durch, so können **Schnittflächen** entstehen, die von **Ellipsen** begrenzt werden.

Vielleicht habt ihr an eurer Schule Modelle von Zylindern und Kegeln, an denen man diese Schnittflächen betrachten kann.



Aufgaben

999

Konstruiere die gegebenen Ellipsen mit Hilfe der Gärtnerkonstruktion mit Stecknadeln, Fäden und Buntstiften!

a) $\overline{F_1F_2} = 140$ mm, Fadenlänge **1)** 180 mm, **2)** 200 mm, **3)** 240 mm

b) $\overline{F_1F_2} = 100$ mm, Fadenlänge **1)** 120 mm, **2)** 160 mm, **3)** 200 mm

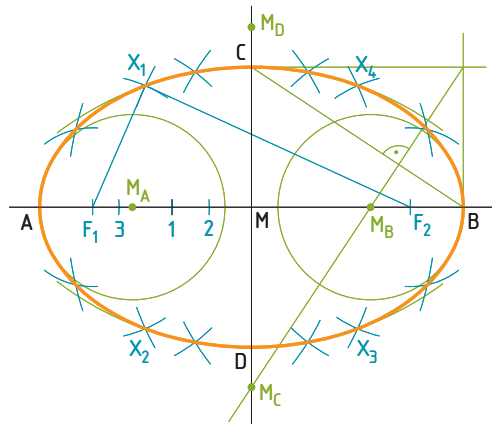
c) Fadenlänge 140 mm, **1)** $\overline{F_1F_2} = 80$ mm, **2)** $\overline{F_1F_2} = 100$ mm, **3)** $\overline{F_1F_2} = 120$ mm

d) Fadenlänge 200 mm, **1)** $\overline{F_1F_2} = 100$ mm, **2)** $\overline{F_1F_2} = 130$ mm, **3)** $\overline{F_1F_2} = 160$ mm

Beispiel Konstruiere eine Ellipse mit $a = 28 \text{ mm}$, $e = 21 \text{ mm}$!

Konstruktionsgang ($\rightarrow$ Figur rechts):

1. Beginne mit den Achsen der Ellipse und trage auf der waagrechten Achse $a = MA = MB$ bzw. $e = MF_1 = MF_2$ auf!
2. Ermittle C und D mit $\overline{CF_1} = \overline{DF_1} = a$!
3. Überlege: Für alle Ellipsenpunkte X gilt:
 $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a = \overline{AB}$
 Wähle auf der Strecke F_1M einen Hilfspunkt 1! Schlägst du nun von F_1 aus Kreisbögen mit dem Radius $\overline{A1}$ und von F_2 Kreisbögen mit dem Radius $\overline{1B}$ ab, so erhältst du zunächst zwei, wenn du die Rollen von F_1 und F_2 vertauschst vier Ellipsenpunkte (X_1, X_2, X_3, X_4).
4. Wähle nun andere Hilfspunkte 2, 3 ... auf F_1M und konstruiere weitere Ellipsenpunkte! Warum ist ein Hilfspunkt zwischen A und F_1 ungeeignet?
5. Wenn du eine genügend große Anzahl von Ellipsenpunkten konstruiert hast, kannst du die Ellipse mit Hilfe eines Kurvenlineals zeichnen!
6. Ein guter Behelf zur Konstruktion von Ellipsen sind jene Kreise, die sich in den Scheiteln an die Ellipse anschmiegen („Schmiegekreise“ oder „Krümmungskreise“). Entnimm die Konstruktion ihrer Mittelpunkte (M_A, M_B, M_C, M_D) aus der dargestellten Figur!



1000 Konstruiere die Ellipse! Berechne die Länge der fehlenden Größe!

Ellipse	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	50 mm	45 mm		50 mm	52 mm	
b		40 mm	30 mm		20 mm	48 mm
e	45 mm		48 mm	30 mm		20 mm

1001 Ellipsen, bei denen $b = e$ gilt, nennt man auch „Ellipsen schönster Form“.

Konstruiere so eine Ellipse!

- a)** $b = 30 \text{ mm}$ **c)** $b = 40 \text{ mm}$ **e)** $a = 60 \text{ mm}$
b) $e = 35 \text{ mm}$ **d)** $a = 50 \text{ mm}$ **f)** $a = 45 \text{ mm}$

+ 1002 1) Konstruiere eine Ellipse mit $a = 50 \text{ mm}$ und $b = 28 \text{ mm}$!

2) Ermittle jene Punkte der Ellipse, von denen aus man die Strecke F_1F_2 unter dem Winkel α sieht!

- a)** $\alpha = 60^\circ$ **c)** $\alpha = 30^\circ$ **e)** $\alpha = 75^\circ$
b) $\alpha = 90^\circ$ **d)** $\alpha = 50^\circ$ **f)** $\alpha = 45^\circ$

1003 Ellipsen mit **gemeinsamen Brennpunkten** heißen **konfokale Ellipsen**.

Konstruiere drei konfokale Ellipsen!

- a)** $e = 30 \text{ mm}$; $b_1 = 15 \text{ mm}$, $b_1 = 25 \text{ mm}$, $b_3 = 50 \text{ mm}$
b) $e = 35 \text{ mm}$; $a_1 = 40 \text{ mm}$, $a_2 = 45 \text{ mm}$, $a_3 = 50 \text{ mm}$

Bemerkung: kon- (lat. con-) ... zusammen-; „fokal“ ... abgeleitet von focus

Ellipse

Ein hoffnungsvoller junger Kreis lief Schlittschuh auf dem blanken Eis. Sich rühmend, dass er kerngesund und außerdem – natürlich rund – wollt’ er besonders hoch hinaus und führte tolle Sprünge aus. Der ungestüme Übermut bekam ihm aber gar nicht gut. Am Sturz, den er sodann gebaut, hat er sein Leben lang gekaut. Der Mittelpunkt war ihm verrückt, sein Radius in zwei zerstückt. Als Kreis war’s nun mit ihm vorbei, er glich jetzt eher einem Ei und hieß Ellipse als Figur, die niemals mehr auf Schlittschuh’n fuhr.

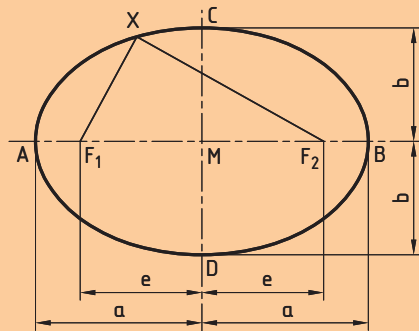
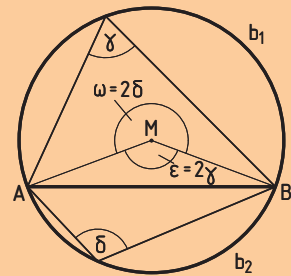
(Ehrenfried Winkler)

ZUSAMMENFASSUNG

Peripheriewinkel, die ihren Scheitel auf demselben Kreisbogen haben, sind **gleich groß**.

Die **Peripheriewinkel** sind **halb so groß** wie der zugehörige **Zentriwinkel**.

Zwei Peripheriewinkel, die ihre Scheitel auf **verschiedenen Kreisbögen** b_1 und b_2 haben, ergänzen einander auf 180° (wenn b_1 und b_2 zusammen den Kreis k ergeben).



Die **Ellipse** ist die Menge aller Punkte, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 , F_2 den konstanten Wert $2a$ hat ($\rightarrow$ Figur links):

$$\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a$$

Der Abstand der **Brennpunkte** F_1 und F_2 zum Mittelpunkt M heißt **lineare Exzentrizität** e .

$$\text{Es gilt: } e^2 = a^2 - b^2$$

Kennzeichne die jeweils gelöste Aufgabe. Lösungen findest du auf Seite 277.

Wissensstraße

- 1004** Beweise, dass in jedem Dreieck die Summe der drei Innenwinkel 180° beträgt!
- 1005** Beweise, dass in jedem Dreieck die Summe der drei Außenwinkel 360° beträgt!
- 1006** Begründe mit eigenen Worten, wieso in jedem Dreieck die angeführten drei Linien einander jeweils in einem einzigen Punkt schneiden!
a) Seitensymmetralen **b)** Winkelsymmetralen **c)** Höhenlinien **+ d)** Schwerlinien
- 1007** Mainfeld, Nonnbach und Oberau wollen einen gemeinsamen Tennisplatz anlegen (Lageplan in der Figur rechts). Jeder der Ortsvorsteher beharrt darauf, dass die Tennisanlage nicht mehr als 10 km vom jeweiligen Ortszentrum entfernt errichtet wird. Ist so ein Unternehmen überhaupt möglich? Begründe deine Antwort!
- 1008** Gegeben ist eine Strecke AB mit $\overline{AB} = 5\text{ cm}$. Ermittle alle jene Punkte der Zeichenebene, von denen aus die Strecke AB unter dem Winkel $\gamma = 40^\circ$ gesehen wird!
- 1009** **1)** Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $a = 6\text{ cm}$!
2) Konstruiere unter Beibehaltung der Seite AB ein Dreieck ABC_1 , dessen Flächeninhalt genau so groß ist und bei dem $\gamma_1 = 40^\circ$ ist (zwei Lösungen)!
- 1010** Konstruiere eine Ellipse mit $\overline{F_1F_2} = 12\text{ cm}$ mit Hilfe der „Gärtnerkonstruktion“ und mit Fadenlänge **1)** 14 cm , **2)** 16 cm , **3)** 18 cm !
- 1011** **1)** Konstruiere eine Ellipse mit $a = 55\text{ mm}$ und $b = 33\text{ mm}$ und **2)** berechne e !

