

Lösungen: Quanten und Atome

1 Licht – Wandel des physikalischen Weltbilds, S. 99

Teste dein Wissen 1

Regenbögen sind beeindruckende optische Phänomene. Beschreibe ihr Aussehen und Wetterbedingungen für ihr Entstehen.

Antwort:

Ein Regenbogen ist ein farbiger Kreisbogen, der beim Hauptregenbogen von Rot (außen) bis Violett (innen) verläuft. Sein Mittelpunkt liegt am Gegenstandspunkt genau gegenüber der Sonne.

Wetter-/Beobachtungsbedingungen

Für die Entstehung muss die Sonne hinter dem Beobachter stehen, während sich vor ihm Wassertropfen in der Luft befinden (Regen-/Sprühnebel). Da große Bögen nur bei tiefem Sonnenstand sichtbar sind, entstehen sie meist morgens oder abends bei gleichzeitigem Sonnenschein und Regen.

Teste dein Wissen 2

Stelle den Strahlengang des roten und des blauen/violetten Anteils des Sonnenlichts in Regentropfen und weiter zum Auge grafisch dar (beachte die unterschiedlichen Brechzahlen!). Erläutere mithilfe der Grafik deinen Familienangehörigen die unterschiedlichen Richtungen der Farbanteile und wie dadurch im (Haupt-)Regenbogen die Reihenfolge der Farben zustande kommt. Wieso sieht man Regenbögen als unvollständige Kreise?

Antwort:

Die Geometrie

Zeichne auf die linke Seite ein Auge (beobachtende Person) in Blickrichtung nach rechts.

Auf die rechte Seite zeichnest du dann zwei Kreise übereinander (die Regentropfen).

Die Sonnenstrahlen kommen von oben links, also aus dem Rücken der beobachtenden Person.

Der Weg des Lichts (in jedem Tropfen gleich)

Eintritt (Brechung): Der weiße Lichtstrahl trifft auf die obere Hälfte des Tropfens. Dort wird er zum Lot hin gebrochen. Da Blau/Violett stärker gebrochen wird als Rot, spaltet sich der Strahl auf: Der blaue/violette Strahl knickt stärker nach unten ab als der rote.

Rückseite (Reflexion): Beide Strahlen treffen auf die Rückseite des Tropfens und werden dort reflektiert. Der blaue/violette Strahl ist jetzt "oberhalb" des roten Strahls im Tropfen.

Austritt (Brechung): Die Strahlen verlassen den Tropfen unten wieder in Richtung beobachtende Person. Dabei werden sie vom Lot weg gebrochen.

Der entscheidende Unterschied (Die Winkel)

Rotes Licht verlässt den Tropfen in einem steileren Winkel zum Sonnenstrahl (ca. 42°).

Blaues/violettes Licht verlässt den Tropfen in einem flacheren Winkel (ca. 40°).

Für das Zwei-Tropfen-Modell gilt

Oberer Tropfen: Zeichne den Strahlengang so, dass der rote Strahl genau das Auge trifft. Der blaue/violette Strahl aus diesem Tropfen verläuft zu steil und geht über das Auge hinweg (wird also nicht gesehen).

Unterer Tropfen: Zeichne ihn so, dass der blaue Strahl das Auge trifft. Der rote Strahl aus diesem Tropfen verläuft zu flach/tief und verfehlt das Auge (wird nicht gesehen).

Erklärung:

Warum sehen wir Farben? (Brechung)

„Das Sonnenlicht ist weiß, aber es enthält alle Farben. Wenn es in die Wassertropfen eintritt, wirkt das

Wasser wie ein Prisma. Das nennt man Brechung. Blaues Licht wird stärker abgelenkt als das rote Licht. Deshalb trennen sich die Farben im Tropfen auf.“

Warum ist Rot oben und Blau unten? (Die Richtungen)

„Obwohl Blau im Tropfen stärker gebrochen wird, sehen wir es im Regenbogen innen (unten). Warum? Das rote Licht kommt in einem steileren Winkel zurück. Damit dieser Strahl auf das Auge trifft, muss der Regentropfen höher am Himmel stehen.

Das blaue Licht kommt flacher zurück. Damit dieser Strahl das Auge trifft, muss der Tropfen etwas tiefer stehen. Deshalb sieht man das Rot von den oberen Tropfen und das Blau von den unteren Tropfen. Das ergibt die Reihenfolge: Rot außen, Blau innen.“

Warum sieht man meist nur einen unvollständigen Kreis?

Der untere Teil des Kreises liegt meistens unter dem Horizont und wird durch Boden/Erde verdeckt oder es fehlen dort die Regentropfen im Sichtfeld. Deshalb sieht man normalerweise nur den Bogen bzw. den Halbkreis über dem Horizont. Wenn man aber in einem Flugzeug sitzen oder auf einem Berggipfel stehen würde (mit freier Sicht nach unten) und Regen fällt, könnte man tatsächlich einen kompletten, geschlossenen Kreisregenbogen sehen. Die Sonne müsste natürlich auch hier hinter der beobachtenden Person stehen.

Teste dein Wissen 3

Erkläre, warum man von einem Berggipfel aus Regenbögen auch als vollständige Kreise sehen kann.

Antwort:

Ein Regenbogen bildet physikalisch einen Kreis um den Gegen Sonnenpunkt. Von einem erhöhten Standort wie einem Berggipfel oder einem Flugzeug aus liegt der Horizont tiefer im Blickfeld, wodurch auch der Bereich unterhalb der üblichen Horizontlinie sichtbar wird. Sofern sich in der Tiefe, beispielsweise durch Talnebel oder Sprühnebel, ausreichend Wassertropfen befinden, kann sich der untere Teil des Bogens schließen und der Regenbogen als vollständiger Kreis erscheinen.

Rechenaufgabe 1

Die Erde empfängt von der Sonne an der Grenze zum Weltraum eine Strahlungsleistung von $1\,360\text{ W/m}^2$ (Solarkonstante). Die Distanz Sonne-Erde beträgt 150 Mio. Kilometer. Die Entfernung des Planeten Mars von der Sonne beträgt im Mittel 225 Mio. Kilometer. Berechne den Wert der Solarkonstanten des Mars. Welche Konsequenzen ergeben sich deiner Meinung nach für einen Aufenthalt am Mars?

Antwort:

Gegeben: $S_E = 1360\text{ W/m}^2$, $r_E = 150\text{ Mio km}$, $r_M = 225\text{ Mio km}$

Prinzip (Abstandsquadratgesetz):

$$S \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow S_M = S_E \left(\frac{r_E}{r_M} \right)^2$$

Rechnung:

$$S_M = 1360\text{ W/m}^2 \left(\frac{150\text{ Mrd m}}{225\text{ Mrd m}} \right)^2 = 1360\text{ W/m}^2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \approx 604\text{ W/m}^2$$

Die Solarkonstante des Mars beträgt somit etwa 604 W/m^2 . Der berechnete Wert weicht nicht allzu sehr vom Literaturwert von 590 W/m^2 ab.

Konsequenz:

Mit 604 W/m^2 empfängt der Mars deutlich weniger Sonnenenergie als die Erde (nur ca. 44 % der Erd-Solarkonstante). Photovoltaik würde deshalb spürbar weniger Leistung bei gleicher Fläche liefern. Die geringere Erwärmung durch Sonnenstrahlung führt zusätzlich zu einem höheren Bedarf an Heizung/Isolation (neben weiteren Faktoren wie dünner Atmosphäre).

Rechenaufgabe 2

Ein Lichtstrahl trifft im Winkel von 45° auf eine Wasseroberfläche. Die Lichtgeschwindigkeit ist in Wasser um 25 % kleiner als in Luft. Berechne den Winkel des gebrochenen Strahls relativ zur Normalen auf die Oberfläche.

Antwort:

Gegeben: $\alpha_1 = 45^\circ$, $c_{\text{Wasser}} = 0,75 \cdot c_{\text{Luft}}$

Brechungsgesetz in Geschwindigkeitsform:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{Hier: } c_1 = c_{\text{Luft}}, c_2 = c_{\text{Wasser}})$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha_2} &= \frac{c_1}{0,75 \cdot c_1} = \frac{1}{0,75} = \frac{4}{3} \\ \Rightarrow \sin \alpha_2 &= \sin 45^\circ \cdot 0,75 \approx 0,7071 \cdot 0,75 \approx 0,53 \\ \alpha_2 &= \arcsin(0,53) \approx 32^\circ \end{aligned}$$

Der gebrochene Strahl verläuft in einem Winkel von ca. 32° zur Normalen.

Das Licht wird also zum Lot hin gebrochen.

2 Grundideen der Quantenphysik, S. 117**Teste dein Wissen 1**

Erkläre, was man unter dem äußeren Photoeffekt bei Metallen versteht.

Antwort:

Beim äußeren Photoeffekt werden durch kurzwelliges Licht Elektronen aus einer Metalloberfläche herausgelöst. Das passiert nur, wenn die Photonenenergie groß genug ist. Es gibt eine minimale (Grenz-)Frequenz bzw. eine maximale (Grenz-)Wellenlänge.

Teste dein Wissen 2

Beschreibe, wie beim äußeren Photoeffekt die Zahl der austretenden Elektronen von der Frequenz bzw. von der Intensität des Lichts abhängt.

Antwort:

Wichtig ist die Bedingung: oberhalb der materialspezifischen Grenzfrequenz f_G

Intensität (bei $f > f_G$): Höhere Lichtintensität bedeutet mehr Photonen pro Zeiteinheit. Dies führt im Schnitt zu mehr ausgelösten Elektronen.

Frequenz: Unterhalb der Grenzfrequenz f_G treten keine Elektronen aus, und das egal, wie intensiv das Licht ist.

Teste dein Wissen 3

Erkläre, wie beim äußeren Photoeffekt die maximale Energie der austretenden Elektronen von der Frequenz bzw. von der Intensität des Lichts abhängt.

Antwort:

Nach Einstein gilt für die maximale kinetische Energie:

$$E_{\max} = hf - W$$

Folgt: Je größer die Frequenz der Photonen f , desto größer ist die maximale kinetische Energie $E_{\max}$ der austretenden Elektronen. Die Intensität beeinflusst die Anzahl der Elektronen, nicht $E_{\max}$.

Teste dein Wissen 4

Beschreibe, wie Einstein den äußeren Photoeffekt erklärte.

Antwort:

Licht besteht aus Photonen (Lichtquanten) mit der Energie $E = h \cdot f$.

Ein Photon gibt seine Energie an ein Elektron ab. Ein Teil wird für die Austrittsarbeit W benötigt, der Rest ist kinetische Energie: $E_{\max} = hf - W$. So erklärt sich auch die Grenzfrequenz: $h \cdot f_G = W$.

Teste dein Wissen 5

Erkläre, wodurch sich innerer und äußerer Photoeffekt unterscheiden.

Antwort:

Äußerer Photoeffekt: Elektronen verlassen den bestrahlten Körper. (z.B. im Photomultiplier zum Nachweis einzelner Photonen)

Innerer Photoeffekt: Licht erzeugt im Halbleiter bewegliche Ladungsträger, aber Elektronen müssen nicht austreten (z.B. Solarzelle/Photodiode, Bildsensoren etc.).

Teste dein Wissen 6

Erkläre einer Person bei dir zu Hause, was das Teilchenmodell des Lichts besagt.

Antwort:

Das Teilchenmodell besagt: Licht besteht aus masselosen Teilchen – den Photonen.

Ein Photon (oder Lichtquant) hat

$$\text{Energie: } E = h \cdot f \qquad \text{Impuls: } p = h/\lambda$$

Energie und Impuls werden quantisiert (diskrete, unteilbare Energiepakete) übertragen (z. B. beim Photoeffekt, Compton-Effekt). Im Teilchenmodell entspricht die Intensität des Lichts der Anzahl der Photonen.

Teste dein Wissen 7

Erkläre, warum das Röntgenspektrum eine von der Beschleunigungsspannung abhängige kleinste Wellenlänge hat.

Antwort:

Elektronen werden durch die Spannung U beschleunigt und erreichen eine maximale kinetische:

$$E_{e,\max} = e \cdot U \quad (e \text{ ist die Elementarladung})$$

Im Grenzfall wird die kinetische Energie eines Elektrons beim Aufprall auf die Anode einer Röntgenröhre vollständig in ein Photon umgewandelt:

$$e \cdot U = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{h \cdot c}{e \cdot U}$$

Eine größere Beschleunigungsspannung U führt zu einer kleineren minimalen (Grenz)Wellenlänge $\lambda_{\min}$.

Teste dein Wissen 8

Beschreibe, wie der Impuls von Photonen definiert ist. Was bewirkt er?

Antwort:

Photonen sind masselose Teilchen, die sich stets mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

$$p = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Beim Absorbieren oder Reflektieren wird Impuls übertragen und es entsteht Strahlungsdruck (z.B. auf Kometenschweife/Satelliten). Auch der Compton-Effekt bestätigt die Vorhersage $p = h/\lambda$ für den Impuls des Photons.

Teste dein Wissen 9

Erkläre den Doppelspaltversuch mit Wellen, mit makroskopischen Teilchen (z. B. Sandkörner) und mit Elektronen!

Antwort:

Wellen (z.B. Wasserwellen): Trifft eine gerade Wasserwelle auf eine Barriere mit zwei Spalten, entstehen dahinter zwei neue halbkreisförmige Wellen, die sich gegenseitig überlagern (interferieren). Dabei bilden sich durch das Zusammentreffen von Wellenbergen und Wellentälern Bereiche, in denen sich die Wellen stark aufschaukeln (Verstärkung), und andere, in denen das Wasser nahezu ruhig bleibt (Auslöschung).

Sandkörner: Die Streuung einer größeren Anzahl klassischer Teilchen (z. B. Sandkörner) an einem Doppelspalt ist davon abhängig, ob beide Spalte oder nur ein Spalt offen sind. Da Sandkörner nicht interferieren, ergibt sich eine klassische Verteilung aus der Summe der zwei Verteilungen (Spalt 1 + Spalt 2):

$$W_{12} = W_1 + W_2$$

Elektronen: Die einzelnen Teilchen eines Elektronenstrahls erzeugen auf einem Auffangschirm (Detektor) ein Bild aus vielen Punkten. Im Doppelspaltversuch befindet sich im Strahlengang vor dem Detektor eine Blende mit zwei Spalten. Bei Abdeckung eines Spaltes entsteht ein breites unscharfes Bild des anderen, offenen Spaltes (Beugung am Einfachspalt). Sind beide Spalte offen, ergibt sich das typische Interferenzbild einer Welle:

$$W_{12} \neq W_1 + W_2$$

Wenn man also feststellt, durch welchen Spalt das Elektron ging, verschwindet das Interferenzbild.

Teste dein Wissen 10

Beschreibe, welcher Zusammenhang zwischen den Wellen- und Teilcheneigenschaften von Licht und Materie besteht.

Antwort:

Licht zeigt Wellenphänomene wie Beugung und Interferenz sowie Teilchenaspekte wie Lichtquanten (Photonen) und den Photoeffekt.

Materie (z. B. Elektronen) zeigt Teilchen- und auch Welleneigenschaften wie Beugung und Interferenz aufgrund der de-Broglie-Beziehung/Wellenlänge.

Teste dein Wissen 11

Erkläre, worin die Born'sche Deutung der Wellenfunktion besteht.

Antwort:

Die Born'sche Deutung besagt: Das Verhalten der Quantenobjekte (z.B. Elektronen beim Durchgang durch einen engen Spalt) wird durch eine Welle mit der Wellenfunktion/Wahrscheinlichkeitsamplitude Ψ beschrieben. Das Quadrat der Amplitude Ψ^2 ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen an einem Ort (bzw. in einem Zustand oder an einer bestimmten Stelle des Schirms) nachzuweisen.

Teste dein Wissen 12

Erkläre einer Person bei dir zu Hause, was die Heisenberg'sche Unschärferelation aussagt. Was bedeutet dabei „Unschärfe“?

Antwort:

Ort und Impuls können nicht gleichzeitig beliebig genau festgelegt werden:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$$

(Δx ... Ortsunschärfe, Δp_x ... Impulsunschärfe)

„Unschärfe“ bedeutet eine Streuung der Messwerte, nicht ungenaues Messen.

Teste dein Wissen 13

Erkläre den Tunneleffekt mit Hilfe der Unschärferelation!

Antwort: (Beispiel α -Zerfall)

Beim Tunneleffekt kann ein Quantenobjekt eine Barriere mit kleiner Wahrscheinlichkeit überwinden, obwohl seine mittlere Energie dafür nicht reicht. Für eine sehr kurze Zeit Δt kann die Energie um ΔE „unscharf“ sein:

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx h$$

Dadurch sind seltene „Fluchtversuche“ über Barrieren möglich, die für klassische Teilchen unüberwindbar wären. Am Rand eines α -aktiven Kerns (z.B. eines Uranisotops U-238) wird ein α -Teilchen (Helium-Atomkern) durch die anziehende Kernkraft zurückgehalten. Aufgrund des Tunneleffekts kann es diesen Bereich verlassen.

Teste dein Wissen 14

Diskutiere mit einer Mitschülerin oder einem Mitschüler, welche Fragen in der Quantenmechanik bei der Interpretation der Messergebnisse auftreten.

Antwort:

Typische Fragen: Welche Rolle spielt die Unschärferelation? Existieren Werte und Eigenschaften wie Bahn(Impuls), Ort und Polarisationsrichtung bereits vor der Messung (Kopenhagener Deutung, Bohr/Einstein-Kontroverse)? Welche Rolle spielen Messapparatur/Umwelt (Dekohärenz, Schrödingers Katze)? Wie ist Verschränkung zu deuten (EPR-Experiment)?

Rechenaufgabe 1

Eine gelb leuchtende LED sendet Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 600 \text{ nm}$ aus. Sie wird mit der Spannung von 4 V und mit der Stromstärke 20 mA betrieben.

a) Berechne die Energie der einzelnen Photonen bei $\lambda = 600 \text{ nm}$.

b) Bestimme, wie viele Photonen pro Sekunde von der Lampe ausgehen, wenn 33 % der zugeführten elektrischen Leistung als Licht abgestrahlt werden (die restliche zugeführte Leistung wird durch den

Innenwiderstand der LED in Wärme umgewandelt).

Antwort:

Gegeben: $\lambda = 600 \text{ nm} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, $U = 4 \text{ V}$, $I = 20 \text{ mA} = 0,02 \text{ A}$

a) Energie pro Photon

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda} \approx \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 3,315 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

In eV: (da $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

$$E = \frac{3,315 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 2,07 \text{ eV}$$

Die einzelnen Photonen haben bei $\lambda = 600 \text{ nm}$ eine Energie von etwa 2,07 eV.

b) Photonen pro Sekunde (33% wird Licht)

Elektrische Leistung: $P_{\text{el}} = U \cdot I = 4 \text{ V} \cdot 0,02 \text{ A} = 0,08 \text{ W}$

Lichtleistung: $P_{\text{L}} = 0,33 \cdot 0,08 \text{ W} = 0,0264 \text{ W}$

Photonenrate:

$$N = \frac{P_{\text{L}}}{E} = \frac{0,0264 \text{ W}}{3,315 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \approx 7,96 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

Es gehen somit etwa $8 \cdot 10^{16}$ Photonen pro Sekunde von der Lampe aus.

Rechenaufgabe 2

Eine Fotozelle aus Cs_3Sb spricht auf Licht mit $\lambda < 670 \text{ nm}$ an. Berechne, wie groß die Austrittsarbeit der Elektronen ist.

Antwort:

Grenzwellenlänge $\lambda_G = 670 \text{ nm} = 6,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

Da an der Schwelle $E_{\text{max}} = 0$, so gilt für die Austrittsarbeit dann: $W = h \cdot c / \lambda_G$

$$\Rightarrow W \approx \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{6,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \approx 2,97 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

In eV: (da $1 \text{ eV} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

$$W = \frac{2,97 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 1,86 \text{ eV}$$

Die Austrittsarbeit der Elektronen beträgt etwa 1,86 eV.

Rechenaufgabe 3

In einem Experiment zum Photoeffekt wurden bei verschiedenen Wellenlängen die Maximalenergien der ausgelösten Elektronen gemessen:

$\lambda \text{ (nm)}$	$E_{\text{max}} \text{ (eV)}$
578	0,13
546	0,27
436	0,81
405	1,02

Bestimme die Austrittsarbeit und die Planck'sche Konstante!

Antwort:

Wir nutzen hier die Einstein-Gleichung für den Photoeffekt: $E_{\max} = h \cdot f - W$.
Das Ziel ist es, aus den Messdaten eine lineare Funktion (die Geradengleichung $y = k \cdot x + d$) zu bauen.

Man sieht, dass y der Energie $E_{\max}$, x der Frequenz f , die Steigung k der Planck'schen Konstante h und der y-Achsenabschnitt d der negativen Austrittsarbeit $-W$ entspricht.

Schritt 1: Daten vorbereiten (Wellenlängen in Frequenz umrechnen)

Für die Berechnung muss man zuerst die Wellenlängen mit der Beziehung $f = c/\lambda$ in Frequenzen umrechnen: ($c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s)

$$\lambda_1 = 578 \text{ nm} \Rightarrow f_1 \approx 519 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

$$\lambda_2 = 546 \text{ nm} \Rightarrow f_2 \approx 549 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

$$\lambda_3 = 436 \text{ nm} \Rightarrow f_3 \approx 688 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

$$\lambda_4 = 405 \text{ nm} \Rightarrow f_4 \approx 741 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

Schritt 2: Die Planck Konstante bestimmen

Das h ist die Steigung unserer Geraden. Wir berechnen sie mit dem Steigungsdreieck $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta E_{\max}}{\Delta f}\right)$:

$$h = \frac{\Delta E_{\max}}{\Delta f} = \frac{E_2 - E_1}{f_2 - f_1}$$

Zwischen 519 THz und 549 THz: (1 Terahertz = 10^{12} Hertz)

$$\Delta E_{2-1} = 0,27 \text{ eV} - 0,13 \text{ eV} = 0,14 \text{ eV}$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{2-1} &= (549 - 519) \cdot 10^{12} \text{ Hz} = 3 \cdot 10^{13} \text{ Hz} (= 3 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}) \\ \Rightarrow h_{2-1} &= \frac{0,14 \text{ eV}}{3 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}} \approx 4,67 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \end{aligned}$$

Umrechnung in Joule: ($1 \text{ eV} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

$$h_{2-1} \approx 4,67 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \approx 7,47 \cdot 10^{-34} \text{ J}$$

Die restlichen Berechnungen werden analog durchgeführt:

$$\text{Für } 549 \text{ THz und } 688 \text{ THz: } h_{3-2} \approx 3,88 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \approx 6,21 \cdot 10^{-34} \text{ J}$$

$$\text{Für } 688 \text{ THz und } 741 \text{ THz: } h_{4-3} \approx 3,96 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \approx 6,34 \cdot 10^{-34} \text{ J}$$

$$\text{Mittelwert der Planck Konstanten: } \bar{h} = 4,17 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \approx 6,67 \cdot 10^{-34} \text{ J}$$

Schritt 3: Die Austrittsarbeit bestimmen

Wir stellen die Einstein-Gleichung zuerst nach W um: $W = h \cdot f - E_{\max}$ **(1)**

Man könnte nun für die weiteren Berechnungen den berechneten Mittelwert $\bar{h}$ oder den Tabellenwert $h \approx 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$ verwenden. Da die einzelnen Steigungen h stark gestreut sind, ist der Mittelwert nur eine grobe Schätzung für die Planck Konstante.

Setzen wir $\bar{h}$ in Gleichung **(1)** ein, dann erhalten wir:

$$W_1 \approx (4,17 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}) \cdot (519 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}) - 0,13 \text{ eV} \approx 2,03 \text{ eV}$$

$$W_2 \approx (4,17 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}) \cdot (549 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}) - 0,27 \text{ eV} \approx 2,02 \text{ eV}$$

$$W_3 \approx (4,17 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}) \cdot (688 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}) - 0,81 \text{ eV} \approx 2,04 \text{ eV}$$

$$W_4 \approx (4,17 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}) \cdot (741 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}) - 1,02 \text{ eV} \approx 2,07 \text{ eV}$$

Mittelwert: $\bar{W} = 2,04 \text{ eV}$

Setzen wir den Tabellenwert in Gleichung (1) ein, dann erhalten wir:

$$W_1 \approx (4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}) \cdot (519 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}) - 0,13 \text{ eV} \approx 2,02 \text{ eV}$$

$$W_2 \approx (4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}) \cdot (549 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}) - 0,27 \text{ eV} \approx 2,00 \text{ eV}$$

$$W_3 \approx (4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}) \cdot (688 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}) - 0,81 \text{ eV} \approx 2,04 \text{ eV}$$

$$W_4 \approx (4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}) \cdot (741 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}) - 1,02 \text{ eV} \approx 2,05 \text{ eV}$$

Mittelwert: $\bar{W} \approx 2,03 \text{ eV}$

Zusammengefasst erhalten wir die folgende Tabelle:

λ (nm)	f (10^{12} Hz)	E_{max} (eV)	h (10^{-15} eVs)	h (10^{-34} Js)	$W(\bar{h})$ (eV)	$W(h)$ (eV)
578	519	0,13			2,03	2,02
546	549	0,27	4,67 (2-1)	7,47 (2-1)	2,02	2,00
436	688	0,81	3,88 (3-2)	6,21 (3-2)	2,04	2,04
405	741	1,02	3,96 (4-3)	6,34 (4-3)	2,07	2,05
Mittelwert:			4,17	6,67	2,04	2,03
Tabellenwert:			4,14	6,63		

Die kleinen Abweichungen der Mittelwerte von den Tabellenwerten (0,6-0,7 %) resultieren aus Rundungen und Messungenauigkeiten. Auch die Mittelwerte der Austrittsarbeit weichen nur minimal voneinander ab.

Rechenaufgabe 4

Die Frequenz der elektromagnetischen Wellen im Mikrowellenherd beträgt 2,455 GHz.

a) Berechne die Wellenlänge.

b) Berechne die Energie (in eV) der Photonen dieser Strahlung.

Antwort:

Mikrowellenherd: $f = 2,455 \text{ GHz} = 2,455 \cdot 10^9 \text{ Hz}$

a) Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,455 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}} \approx 1,22 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$\boxed{\lambda \approx 0,122 \text{ m} = 12,2 \text{ cm}}$$

Die Wellenlänge der Mikrowellenstrahlung beträgt etwa 12,2 cm.

b) Photonenenergie

$$E = h \cdot f = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,455 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} = 1,63 \cdot 10^{-24} \text{ J}$$

In eV: (da $1 \text{ eV} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

$$E = \frac{1,63 \cdot 10^{-24} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

Die Photonen der Mikrowellenstrahlung haben eine Energie von etwa $1 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$.

Rechenaufgabe 5

Elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen kürzer als 250 nm wirkt ionisierend, d.h. sie kann aus Atomen und Molekülen Elektronen freisetzen. Bestimme, welche Mindestenergie (in eV) Photonen dieser Strahlung haben.

Antwort:

Ionisierend für $\lambda < 250 \text{ nm} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \rightarrow$ Mindestenergie $E_{\min}$

$$E_{\min} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 7,956 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

In eV: (da $1 \text{ eV} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

$$E_{\min} = \frac{7,956 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 4,97 \text{ eV}$$

Photonen dieser Strahlung haben eine Mindestenergie von etwa 5 eV.

Rechenaufgabe 6

Der He-Ne-Laser hat auch einen Übergang mit einer Photonenenergie von 1,12 eV. Berechne die Wellenlänge der emittierten Strahlung und erkläre, in welchem Wellenlängenbereich sie liegt.

Antwort:

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E}$$

Photonenenergie in J umrechnen: ($1 \text{ eV} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

$$E = 1,12 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,792 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\lambda \approx \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{1,792 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \approx 1,11 \cdot 10^{-6} \text{ m} \approx 1110 \text{ nm}$$

Der Photonenenergie von 1,12 eV entspricht eine Wellenlänge von etwa 1 110 nm $\rightarrow$ (nahes) Infrarot.

3 Aufbau von Atomen, S. 126

Teste dein Wissen 1

Beschreibe, warum α -Teilchen abgelenkt werden, wenn sie einem Atomkern nahe kommen.

Antwort:

α -Teilchen sind zweifach positiv geladene Helium-Ionen. Die Kerne aller Sorten von Atomen sind positiv geladen. Schießt man α -Teilchen gegen andere Kerne, dann stoßen sie einander ab. Je kleiner der Abstand r , desto größer die Abstoßung ($\propto 1/r^2$) und die Bahn wird gekrümmt. Bei sehr naher Annäherung können α -Teilchen sogar zurückgestreut werden.

Teste dein Wissen 2

Beschreibe, welche Annahmen Bohr traf, um die Spektrallinien von Gasen zu erklären.

Antwort:

Bohr traf (vereinfacht) folgende Kernaussagen:

1. Elektronen können nur bestimmte (diskrete) Energieniveaus besitzen.
2. Es gibt stabile/stationäre Bahnen/Zustände, auf denen Elektronen nicht dauernd abstrahlen (sonst wäre das Atom instabil).

Licht wird nur bei Übergängen zwischen Energieniveaus emittiert/absorbiert:

$$hf = E_n - E_m$$

(E_n/m ... höheres/niedrigeres Energieniveau)

→ Spektrallinien entsprechen Energiedifferenzen.

3. Zusatzannahme (Quantenbedingung): Der Bahndrehimpuls ist quantisiert:

$$r \cdot m_e \cdot v = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(h ... Planck'sches Wirkungsquantum, n ... Quantenzahl, m_e ... Elektronenmasse)

Teste dein Wissen 3

Erkläre einer Schulkollegin oder einem Schulkollegen, welche Kräfte die Bewegung des Elektrons um den Kern bestimmen.

Antwort:

Die anziehende Coulomb-Kraft wirkt zwischen Kern ($+Ze$) und Elektron ($-e$):

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}$$

(ϵ_0 ... elektrische Feldkonstante, Z ... Kernladungszahl)

Im Bohr-Modell liefert sie die notwendige Zentripetalkraft der Kreisbewegung:

$$F_C = F_Z = \frac{m_e v^2}{r}$$

Mit der Quantenbedingung erhält man erlaubte Bahnradien und Energien.

Teste dein Wissen 4

Bewerte, ob ebene Elektronenbahnen ein ernst zu nehmendes Argument gegen das Bohr'sche Atommodell sind.

Antwort:

Starke Kritik betrifft die Annahme von Kreisbahnen der Elektronen im Bohr-Modell. Dieses nimmt klassische, ebene und stabile Kreisbahnen an. Es ist ein nützliches Näherungsmodell (v.a. für das Wasserstoffatom), aber keine vollständige Beschreibung. Entscheidend ist, dass es keine Bahn im klassischen Sinn gibt, sondern eine räumliche Verteilung/Aufenthaltswahrscheinlichkeit Ψ^2 des Elektrons mit den entsprechenden Orbitalen.

Teste dein Wissen 5

Erkläre einem Freund oder einer Freundin, was man unter einem Orbital versteht.

Antwort:

Unter einem Orbital versteht man die räumliche „Wolke“ der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons. Die Wellenfunktion Ψ beschreibt dabei die Elektronenwelle, und Ψ^2 gibt an, wie wahrscheinlich man das Elektron an einem Ort findet.

Teste dein Wissen 6

Beschreibe, warum negative Werte für die Energieniveaus angegeben werden.

Antwort:

Die Energieskala wird so gewählt, dass ein freies Elektron in unendlicher Entfernung vom Kern die Energie 0 hat. Ein gebundenes Elektron ist durch die Anziehung „unterhalb“ dieses Nullniveaus → es hat negative Energie. Um es zu lösen, muss man mindestens die Ionisationsenergie aufbringen.

Teste dein Wissen 7

Beschreibe, welche Tatsache mit dem Pauli-Prinzip erklärt wird.

Antwort:

Das Pauli-Prinzip (auch Pauli-Verbot genannt) erklärt, warum nicht beliebig viele Elektronen denselben Zustand (dasselbe Orbital) besetzen können:

Jedes Orbital kann maximal zwei Elektronen aufnehmen.

Dies ist auch nur für Elektronenpaare mit entgegengesetztem Spin gültig. Dadurch erklärt sich u. a. die Schalen-/Orbitalstruktur von Atomen und die Ordnung des Periodensystems.

Teste dein Wissen 8

Beschreibe, ob der Atomradius oder die Wellenlänge von rotem Licht größer ist.

Antwort:

Ein Atomradius ist in der Größenordnung: $\sim 10^{-10}$ m, Bohr-Radius $a_0 \approx 5,3 \cdot 10^{-11}$ m
Rotes Licht hat eine Wellenlänge von etwa $6 \cdot 10^{-7}$ m (600 nm).

Verhältnis:

$$\frac{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}} \approx 1,1 \cdot 10^4$$

Die Wellenlänge von rotem Licht ist also etwa 11 000-Mal „größer“ als ein Atomradius.

Teste dein Wissen 9

Erkläre einer Person bei dir zu Hause, warum H-Atome UV-Licht beim Übergang $E_2 \rightarrow E_1$ emittieren.

Antwort:

Beim Übergang wird ein Photon mit $h \cdot f = E_2 - E_1$ abgegeben.

Für Wasserstoff gilt $E_n = E_1/n^2$ mit $E_1 = -13,6$ eV.

Für den $E_2 \rightarrow E_1$ Übergang mit $n = 2$ gilt also:

$$E_2 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{4} = -3,4 \text{ eV}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (-3,4 \text{ eV}) - (-13,6 \text{ eV}) = 10,2 \text{ eV}$$

Diese Photonenenergie entspricht einer Wellenlänge von (mit $h \cdot c \approx 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$)

$$\lambda \approx \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{10,2 \text{ eV}} \approx \mathbf{122 \text{ nm.}}$$

122 nm liegt im Ultraviolett (Lyman-Serie).

Teste dein Wissen 10

Erkläre einer Freundin oder einem Freund, warum eine Flamme gelb leuchtet, wenn man kleine Steinsalzkrystalle (NaCl) hineinstreut.

Antwort:

In der Flamme werden Natrium-Atome/-Ionen im NaCl-Molekül angeregt. Beim Zurückfallen in tiefere Energieniveaus senden sie Licht mit charakteristischen Spektrallinien aus. Bei Natrium sind diese besonders stark im gelben Bereich (Natrium-D-Linien mit $\sim 589 \text{ nm}$ beim $3p \rightarrow 3s$ Übergang) sichtbar. Daher dominiert diese Farbe und die Flamme sieht gelb aus.

Rechenaufgabe 1

Mit der Bohr'schen Theorie kann man die Energiewerte aller Ionen mit einem Elektron berechnen (siehe Anmerkung zu Aufgabe 3).

- Berechne die Energiewerte von einfach ionisiertem Helium He^+ .
- Bestimme, welche Übergänge im sichtbaren Spektrum liegen.

Antwort:

a) Energiewerte von He^+

Für wasserstoffähnliche Ionen (ein Elektron) gilt:

$$E_n = -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

Für He^+ ist $Z = 2$:

$$E_n = -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{4}{n^2} = -\frac{54,4}{n^2} \text{ eV}$$

Beispiele für $n=1,2,3,4$:

$$E_1 = -54,4 \text{ eV}; E_2 = -13,6 \text{ eV}; E_3 \approx -6,04 \text{ eV}; E_4 = -3,40 \text{ eV}$$

b) Sichtbare Übergänge

Photonenenergie:

$$\Delta E = 54,4 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ eV} = E_n - E_m \quad (n > m)$$

Zu Erinnerung: $\lambda = h \cdot c / \Delta E$

Sichtbar sind Wellenlängen von 380 nm bis 750 nm .

Für He^+ liegen z.B. die folgenden Übergänge im sichtbaren Bereich:

- $4 \rightarrow 3: \lambda \approx 470 \text{ nm}$ (blau)
- $6 \rightarrow 4: \lambda \approx 658 \text{ nm}$ (rot)
- $7 \rightarrow 4: \lambda \approx 541 \text{ nm}$ (grün)
- $8 \rightarrow 4: \lambda \approx 486 \text{ nm}$ (blau)

Viele He^+ -Übergänge (z.B. $3 \rightarrow 2$) liegen wegen Z^2 eher im UV-Bereich.

Rechenaufgabe 2

Bestimme, welche Ionisationsenergie 1s-Elektronen im Uranatom ($Z = 92$) haben (siehe Anmerkung zu Aufgabe 3).

Antwort:

Ionisationsenergie (Grundzustand $n = 1$):

$$E_{\text{ion}} = 13,6 \text{ eV} \cdot Z^2$$

Für $Z = 92$:

$$E_{\text{ion}} = 13,6 \cdot 92^2 \text{ eV} = 13,6 \cdot 8464 \text{ eV} = 115110,4 \text{ eV}$$

$$E_{\text{ion}} \approx 1,151 \cdot 10^5 \text{ eV} = 115,1 \text{ keV}$$

Die Ionisationsenergie für ein 1s-Elektron im Uranatom ist mit 115,1 keV das Z^2 -Fache der Ionisationsenergie des H-Atoms.

Rechenaufgabe 3

Berechne, mit welcher Geschwindigkeit 1s-Elektronen um einen Z -fach geladenen Atomkern kreisen. Wie groß ist der Bahnradius?

Anmerkung: Um das Bohr'sche Modell auf beliebige Atome (Kernladungszahl Z) anzuwenden, ist der Faktor e^4 durch $(Z \cdot e^2)^2$ zu ersetzen, da in der Coulombkraft das Produkt aus Kernladung $Z \cdot e$ und Ladung e des Elektrons auftritt.

Antwort:

Bohr'sche Bahnen: Die Coulombkraft zwischen Z -fach geladenem Kern und Elektron ist die Zentripetalkraft für die Kreisbewegung. Der Bahndrehimpuls ist das n -fache von $h/(2\pi)$.

Für die Bahngeschwindigkeit gilt:

$$v_n = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 n h}$$

Für den Bahnradius gilt:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 (nh)^2}{\pi Z e^2 m_e}$$

$$\text{mit Bohrradius: } a = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0,053 \text{ nm}$$

(1) Geschwindigkeit

Für **1s** ($n = 1$):

$$v_1 = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0(1)h} = Z \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = Z \cdot v_0$$

Jetzt bestimmen wir v_0 (das ist die 1s-Geschwindigkeit für Wasserstoff mit $Z = 1$) mit den Konstanten:
 $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

Verwendet man folgende Varianten der SI-Einheiten:

Für Coulomb: $C = A \cdot s$

Für Farad: $F = \frac{A^2 \cdot s^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} \rightarrow F/m = \frac{A^2 \cdot s^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^3}$

Für Joule: $J = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \rightarrow \text{Js} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

$$v_0 \approx \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s})^2}{2 \cdot \left(8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^3}\right) \cdot \left(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)} \approx 2,18 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Geschwindigkeit um den Atomkern:

$$v_{1s} \approx Z \cdot 2,18 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

(2) Bahnradius

Für **1s** ($n = 1$):

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0(1 \cdot h)^2}{\pi Z e^2 m_e} = \frac{a}{Z}$$

Da $a = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ (Bohr-Radius) gilt:

$$r_{1s} = \frac{5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{Z}$$

Eine größere Kernladungszahl Z führt dazu, dass das Elektron stärker angezogen wird und dadurch schneller um den Kern „kreist“ (linear mit Z) und der Bahnradius kleiner wird (um den Faktor $1/Z$).