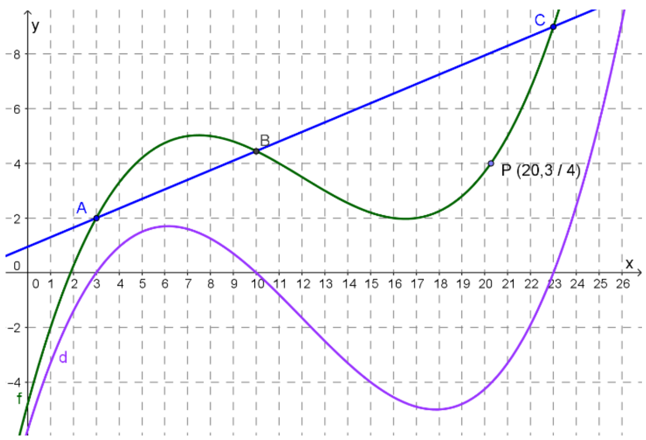
Lösung Aufgabe 791

a) Die Differenzfunktion ist nach der angegebenen Definition jene Funktion, bei der an jeder Stelle x der Funktionswert von g vom Funktionswert von f subtrahiert wird.
Im Intervall [0; 3] ist diese Differenz negativ, weil die Funktionswerte von g größer sind als jene von f. An der Stelle 3 scheiden sich die Funktionsgraphen, die Differenz zwischen ihnen ist null. Im Intervall [3; 10] ist die Differenz positiv, da f(x) größer als g(x) ist. An der Stelle 10 ist die Differenz erneut null, weil sich die Funktionsgraphen schneiden. Im Intervall [10; 23] ist die Differenz wieder negativ, um an der Stelle 23 null zu werden.

Ein Funktionsgraph der Differenzfunktion kann nach dieser Beschreibung nur etwa folgendermaßen aussehen:



Im angegebenen Intervall [3; 23], in dem das Integral berechnet wird, hat die Differenzfunktion d eine Nullstelle bei x = 10, da hier f(10) = g(10) ist.
Das Integral im Intervall [3; 10] würde den Flächeninhalt A_1 der Fläche zwischen den Funktionsgraphen f und g bedeuten. Das Integral im Intervall [10; 23] ergibt den „negativen Flächeninhalt" $-A_2$ der Fläche zwischen den Funktionsgraphen f und g.
Das Integral im Intervall [3; 23] ergibt schließlich $A_1 + (-A_2) = A_1 – A_2$, also die Differenz zwischen den Flächeninhalten der beiden Flächen.

Die Zahl -33,3 bedeutet also, dass der Flächeninhalt der Fläche im Intervall [10; 23] um 33,3 Flächeneinheiten größer ist als der Flächeninhalt der Fläche im Intervall [3; 10].

b) Aussage A:
Im Intervall [3; 10] ist f(x) ≥ g(x) und im Intervall [10; 23] ist f(x) ≤ g(x). Die beiden Integrale sind damit negativ und können nicht den Flächeninhalt ergeben. Die Aussage trifft nicht zu.

Aussage B:
Das Intervall [3; 23] enthält eine Nullstelle der Funktion g – f. Um den Gesamtflächeninhalt zu berechnen, muss diese Nullstelle berücksichtigt werden, also das Intervall an der Stelle 10 geteilt werden. Die Aussage trifft nicht zu.

Aussage C:
Hier werden die einzelnen Flächeninhalte richtig berechnet. Jedoch werden sie voneinander subtrahiert anstatt addiert. Das Minuszeichen zwischen den Integralen bewirkt, dass diese Aussage nicht zutrifft.

Aussage D:
Das erste Integral berechnet den Flächeninhalt der Fläche zwischen f und g im Intervall [3; 10]. Das zweite Integral ist negativ, weil in [10; 23] $f \leq g$ ist. Durch das Minuszeichen vor dem Integral wird der negative Wert positiv, sodass die beiden Integrale addiert werden. Die Aussage trifft zu.

Aussage E:
Das Intervall [3; 23] enthält eine Nullstelle der Funktion f – g. Um den Gesamtflächeninhalt zu berechnen, muss diese Nullstelle berücksichtigt werden, also das Intervall an der Stelle 10 geteilt werden.

Die Funktion g erhält man durch Umformen der Geradengleichung:

$-7x + 20y = 19$	$\mid +7x$
$20y = 19 + 7x$	$\mid :20$
$y = g(x) = \frac{19}{20} + \frac{7}{20}x$	

Den Flächeninhalt der kleineren Fläche berechnet man mit Hilfe des Integrals durch Einsetzen in ein Computer Algebra System:

$$\int_3^{10} f(x) - g(x)dx = 7{,}86$$

c) Zunächst wählt man a so, dass f(a) = 4 ist. Der Graph der Funktion zeigt, dass der Funktionswert an der Stelle 11 den Wert 4 hat. Somit ist die erste Voraussetzung für den Satz von Rolle erfüllt: a = 11, b = 20,3 und f(11) = f(20,3).
Nun behauptet der Satz, dass es eine Stelle m im Intervall [11; 20,3] gibt, an der die Ableitung von f gleich null ist.
Eine passende Stelle $m \in [11; 20{,}3]$ ist ca. 16,5, denn hier gilt f'(16,5) = 0 (Tangente waagrecht).
Damit ist gezeigt, dass der Satz von Rolle für diesen Fall gilt.