

Thema: Geometrische Reihe		Grundkompetenz:
Name:	Schwierigkeitsgrad: mittel, schwer	Klasse:

1. Am Ende eines jeden Jahres werden 1 000€ auf ein mit 3% p.a. verzinstes Sparbuch gelegt. Berechne den Betrag, den man am Ende des fünfzehnten Jahres beheben kann.

2. Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 - 7x + 10 = 0$. Die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung sind die ersten beiden Glieder einer monoton steigenden geometrischen Folge b_n .

a) Berechne die Summe der ersten fünfzehn Folgenglieder.

b) Wie viele Folgenglieder müssen mindestens addiert werden, damit ihre Summe größer als 12 714 wird?

3. Gegeben sind die ersten drei Glieder $b_1 = 2x + 2$, $b_2 = -3x$ und $b_3 = 4x - 8$ einer Zahlenfolge.

a) Bestimme x so, dass eine geometrische Zahlenfolge entsteht.

b) Bestimme die Anzahl der Folgenglieder, die addiert werden müssen, um die Summe $-262\,146$ zu erhalten.

4. Ein Drehkegel hat den Radius $R = 6$ cm und die Körperhöhe $H = 15$ cm. Diesem Drehkegel wird ein achsengleicher Drehzylinder eingeschrieben, der halb so hoch ist wie der Drehkegel. Dem verbleibenden Rest im Drehkegel wird in gleicher Weise ein Drehzylinder eingeschrieben usw. Berechne die Summe der Volumina der ersten sechs Drehzylinder.



Thema: Geometrische Reihe - Lösungen		Grundkompetenz:
Name:	Schwierigkeitsgrad: mittel, schwer	Klasse:

1. Am Ende eines jeden Jahres werden 1 000€ auf ein mit 3% p.a. verzinstes Sparbuch gelegt. Berechne den Betrag, den man am Ende des fünfzehnten Jahres beheben kann.

$$b_1 = 1\,000\text{€} \quad q = 1,03 \quad n = 15$$

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \rightarrow \quad s_{15} = 1\,000 \cdot \frac{1,03^{15} - 1}{1,03 - 1} \approx 18\,598,91\text{ €}$$

Am Ende des fünfzehnten Jahres können 18 598,91 € beheben werden.

2. Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 - 7x + 10 = 0$. Die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung sind die ersten beiden Glieder einer monoton steigenden geometrischen Folge b_n .

a) Berechne die Summe der ersten fünfzehn Folgenglieder.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \quad \text{d.h. } b_1 = 2, b_2 = 5, q = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$s_{15} = b_1 \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{2,5^{15} - 1}{2,5 - 1} \approx 1\,241\,762,10$$

Die Summe der ersten fünfzehn Folgenglieder ist 1 241 762,10.

b) Wie viele Folgenglieder müssen mindestens addiert werden, damit ihre Summe größer als 12 714 wird?

$$2 \cdot \frac{2,5^n - 1}{2,5 - 1} = 12\,714 \quad \rightarrow \quad 2,5^n - 1 = 9\,535,5$$

$$2,5^n = 9\,536,5 \quad | \text{logarithmieren}$$

$$n \cdot \ln(2,5) = \ln(9536,5)$$

$$n = 9,99985... \approx 10$$

Man muss mindestens zehn Folgenglieder addieren, damit ihre Summe 12 714 übersteigt.

3. Gegeben sind die ersten drei Glieder $b_1 = 2x + 2$, $b_2 = -3x$ und $b_3 = 4x - 8$ einer Zahlenfolge.

a) Bestimme x so, dass eine geometrische Zahlenfolge entsteht.

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} \quad \frac{-3x}{2x+2} = \frac{4x-8}{-3x} \quad \rightarrow \quad -3x(-3x) = (4x-8)(2x+2) \quad \rightarrow \quad x = -4$$

Für $x = -4$ entsteht eine geometrische Zahlenfolge.

b) Bestimme die Anzahl der Folgenglieder, die addiert werden müssen, um die Summe $-262\,146$ zu erhalten.

$$b_1 = -6 \quad q = -2 \quad \rightarrow \quad -6 \cdot \frac{(-2)^n - 1}{-2 - 1} = -262\,146 \quad \rightarrow \quad n = 17$$

Es müssen die ersten 17 Folgenglieder summiert werden, um $-262\,146$ zu erhalten.



Thema: Geometrische Reihe - Lösungen		Grundkompetenz:
Name:	Schwierigkeitsgrad: mittel	Klasse:



4. Ein Drehkegel hat den Radius $R = 6$ cm und die Körperhöhe $H = 15$ cm. Diesem Drehkegel wird ein achsengleicher Drehzylinder eingeschrieben, der halb so hoch ist wie der Drehkegel. Dem verbleibenden Rest im Drehkegel wird in gleicher Weise ein Drehzylinder eingeschrieben usw. Berechne die Summe der Volumina der ersten sechs Drehzylinder.

1. eingeschriebener Drehzylinders:

$$h_1 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ cm} \quad 7,5 : r_1 = 15 : 6 \rightarrow r_1 = 3 \text{ cm} \quad V_1 = r_1^2 \cdot \pi \cdot h_1 = 67,5\pi \text{ cm}^3$$

2. eingeschriebener Drehzylinder:

$$h_2 = \frac{7,5}{2} = 3,75 \text{ cm} \quad 3,75 : r_2 = 7,5 : 3 \rightarrow r_2 = 1,5 \text{ cm} \quad V_2 = r_2^2 \cdot \pi \cdot h_2 = 8,4375\pi \text{ cm}^3$$

$$q = \frac{V_2}{V_1} = 0,125 \rightarrow s_6 = V_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 67,5\pi \cdot \frac{0,125^6 - 1}{0,125 - 1} \approx 242,35 \text{ cm}^3$$

Die Summe der Volumina der ersten sechs eingeschriebenen Drehzylinder beträgt $242,35 \text{ cm}^3$.

