

9 VEKTOREN IN \mathbb{R}^3

- W 9.01** Wie sind die Addition, die Subtraktion und die Vervielfachung von Vektoren in \mathbb{R}^3 definiert? Gibt es Analogien zu \mathbb{R}^2 ?
- W 9.02** Wie ist der Betrag eines Vektors in \mathbb{R}^3 definiert?
- W 9.03** Wie ist das skalare Produkt zweier Vektoren in \mathbb{R}^3 definiert?
- W 9.04** Wie lässt sich das Winkelmaß zweier Vektoren in \mathbb{R}^3 berechnen?
- W 9.05** Wie ist das Vektorprodukt zweier Vektoren aus \mathbb{R}^3 definiert? Welche Eigenschaften besitzt es?
- W 9.06** Wie kann man in \mathbb{R}^3 einen Vektor ermitteln, der zu zwei von $\vec{0}$ verschiedenen Vektoren \vec{a} und \vec{b} normal ist? Was lässt sich über Betrag und Richtung dieses Vektors aussagen?



9 VEKTOREN IN \mathbb{R}^3 Lösungen

W 9.01 Es seien $A = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $B = (b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ Vektoren aus \mathbb{R}^3 und $r \in \mathbb{R}$.

Man setzt:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \quad r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Für Vektoren in \mathbb{R}^3 gelten analoge Rechengesetze wie für Vektoren in \mathbb{R}^2 . Diese kann man wie in \mathbb{R}^2 begründen, indem man die Rechnungen für die einzelnen Koordinaten getrennt aufschreibt. Man kann also mit Vektoren in \mathbb{R}^3 im Prinzip so rechnen wie mit Vektoren in \mathbb{R}^2 .

W 9.02 Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a} = (a_1 \mid a_2 \mid a_3) \in \mathbb{R}^3$ versteht man $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

W 9.03 Für alle $A, B \in \mathbb{R}^3$ gilt: Die reelle Zahl $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ nennt man skalares Produkt der Vektoren A und B.

W 9.04 Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ seien durch Pfeile von einem gemeinsamen Anfangspunkt aus dargestellt. Das Maß φ des Winkels, den diese beiden Pfeile miteinander einschließen, nennt man das Winkelmaß der Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Es gilt: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

W 9.05 Es seien $\vec{a} = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $\vec{b} = (b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ Vektoren aus \mathbb{R}^3 . Dann nennt man den Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \text{ Vektorprodukt oder vektorielles Produkt der Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b}.$$

Sind \vec{a} und \vec{b} nicht parallele und von $\vec{0}$ verschiedene Vektoren, dann gilt:

- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{Flächeninhalt eines von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms}$
- \vec{a}, \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem.

W 9.06 Man ermittelt $\vec{a} \times \vec{b}$. Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht sowohl zu \vec{a} als auch zu \vec{b} normal und ist so orientiert, dass \vec{a}, \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden. Der Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist so groß wie der Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.

