11 DIE BINOMIALVERTEILUNG UND WEITERE VERTEILUNGEN

W 11.01 Was sind Binomialkoeffizienten? Wie kann man diese deuten? Wie kann man sie berechnen?

W 11.02 Eine Binomialverteilung der Zufallsvariablen H mit den Parametern n und p wird mit der Formel $P(H = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ beschrieben. Unter welchen Bedingungen ist H binomialverteilt? Erkläre die Bedeutung der Parameter n, k und p in der Formel!

W 11.03 Formuliere eine typische Aufgabenstellung, die mit der Binomialverteilung gelöst werden kann!

W 11.04 Wie ist eine n-stufige Bernoulli-Kette (bzw. ein n-stufiges Bernoulli-Experiment) definiert?

W 11.05 Unter welchen Voraussetzungen kann eine Versuchsserie, die einem mehrmaligen Ziehen ohne Zurücklegen entspricht, mit Binomialverteilung modelliert werden?

W 11.06 Wie lassen sich Erwartungswert μ und Varianz σ^2 einer binomialverteilten Zufallsvariablen H ermitteln?

W 11.07 Was versteht man unter einer geometrischen Verteilung einer Zufallsvariablen H? Was gilt für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2?

W 11.08 Was versteht man unter einer hypergeometrischen Verteilung einer Zufallsvariablen H? Was gilt für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2?

W 11.01 Für $n, k \in \mathbb{N}^*$ mit $k \leqslant n$ setzt man: $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Ergänzend setzt man $\binom{n}{0} = 1$.

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ nennt man Binomialkoeffizienten.

Es ist $\binom{n}{k}$ gleich der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Es ist $\binom{n}{k}$ gleich der Anzahl der aus zwei Buchstaben a und b gebildeten Wörter der Länge n, in denen a genau k-mal vorkommt.

W 11.02 Wird ein Zufallsversuch n-mal unter den gleichen Bedingungen durchgeführt und tritt dabei ein Ereignis E jedes Mal mit der Wahrscheinlichkeit p ein, dann ist die absolute Häufigkeit H des Eintretens von E binomialverteilt mit den Parametern n und p.

In der Formel $P(H = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ bedeutet n die Anzahl der Versuchsdurchführungen, k die Anzahl und p die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von E in der Versuchsserie.

W 11.03 ZB: Ein Zweisektoren-Glücksrad mit einem schwarzen und einem weißen Sektor wird 10-mal unter denselben Bedingungen gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt der Zeiger 6-mal im schwarzen Sektor stehen?

W 11.04 Die n-malige Wiederholung eines Zufallsversuchs bezeichnet man als n-stufige Bernoulli-Kette (bzw. n-stufiges Bernoulli-Experiment), wenn gilt:

- Jeder Einzelversuch besitzt genau zwei Versuchsausgänge (zB Erfolg und Nichterfolg).
- Jeder Einzelversuch wird unter gleichen Bedingungen durchgeführt (was insbesondere bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg nicht ändert).

W 11.05 Entspricht eine Versuchsserie einem mehrmaligen Ziehen ohne Zurücklegen und ist die Stichprobe klein im Vergleich zur Grundgesamtheit, so ist die untersuchte Häufigkeit H annähernd binomialverteilt und es gilt:

$P(H = k) \approx \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

W 11.06 Ist H eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p, dann gilt für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 von H: $\mu = E(H) = n \cdot p$, $\sigma^2 = V(H) = n \cdot p \cdot (1-p)$.

W 11.07 Bei einem Zufallsversuch tritt ein Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit p ein. Der Versuch wird n-mal unter den gleichen Bedingungen durchgeführt. Ist H die Anzahl der Versuchsdurchführungen bis zum erstmaligen Eintreten von E, dann gilt:
$P(H = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$ (für $k = 1, 2, 3, \ldots$)
Sei H eine Zufallsvariable mit den möglichen Werten 1, 2, 3, … . Wird jedem Wert $k \in \mathbb{N}^*$ die Wahrscheinlichkeit $P(H = k) = (1-p)^k \cdot p$ zugeordnet, dann bezeichnet man die dadurch festgelegte Wahrscheinlichkeitsverteilung als geometrische Verteilung mit dem Parameter p. Die Zufallsvariable H nennt man geometrisch verteilt mit dem Parameter p.
Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable H mit dem Parameter p gilt:
$E(H) = \mu = \frac{1}{p}$, $V(H) = \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$.

W 11.08 In einer Menge von N Objekten haben M Objekte die Eigenschaft E und $N - M$ Objekte die Eigenschaft $\neg E$. Aus der Menge der N Objekte werden n Objekte zufällig ausgewählt. Ist H die absolute Häufigkeit der dabei erhaltenen Objekte mit der Eigenschaft E, dann gilt: $P(H = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Sei H eine Zufallsvariable mit den möglichen Werten 0, 1, 2, ..., N. Wird jedem Wert k die Wahrscheinlichkeit $P(H = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ (mit $1 \leqslant M$ a $\leqslant N$, $1 \leqslant n \leqslant N$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $n - k \leqslant N - M$) zugeordnet, dann bezeichnet man die dadurch festgelegte Wahrscheinlichkeitsverteilung als hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M und n. Die Zufallsvariable H nennt man hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M und n.
Für eine hypergeometrisch verteilte Zufallsvariable H mit den Parametern N, M und n gilt:
$E(H) = \mu = n \cdot \frac{M}{N}$, $V(H) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$.