

Seite 128, Aufgabe Bedingung Wendestellen – notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunkte

Ein Wendepunkt ist ein Punkt in einer Kurve, wo sich die Richtung der Kurve ändert. Das heißt wenn die Kurve vorher nach rechts gekrümmt war, krümmt sich die Kurve hinterher nach links. Einen solchen Punkt gibt es auch bei vielen Funktionen. Dieser Punkt ist dort, wo die Steigung der Funktion (Steigung einer Funktion wird durch die Ableitungsfunktion bestimmt) am stärksten ist. Denn vorher wird die Steigung immer stärker und hinterher wieder schwächer durch die entgegengesetzte Krümmung.

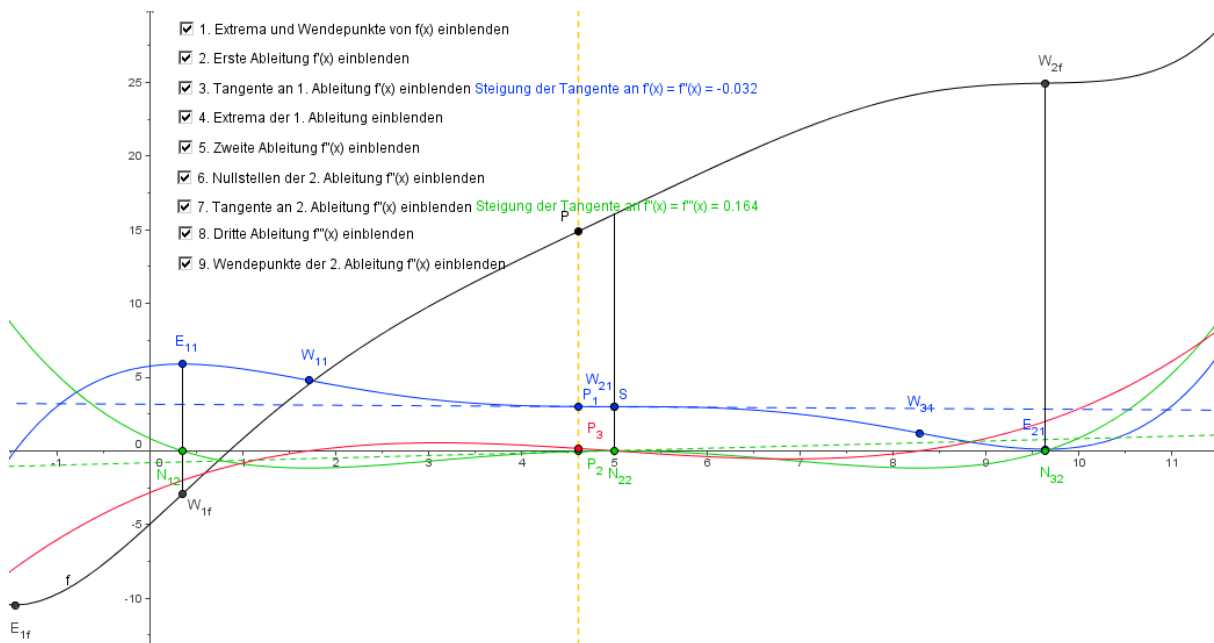
Folglich ist dort, wo die Ableitungsfunktion am extremsten ist (also wo sie einen Extrempunkt hat), ein Wendepunkt vorhanden. Die Extremwerte für eine Funktion berechnet man durch ihre Ableitung, die der Ableitung also durch die zweite Ableitung der Funktion, mit der notwendigen Bedingung, dass diese Null wird.

Folgende Bedingungen müssen also erfüllt sein:

$$f''(x) = 0$$

$$f'''(x) \neq 0$$

Wenn $f'''(x) > 0$, dann ist bei x eine Rechts-Links-Wendestelle und wenn $f'''(x) < 0$, dann ist x eine Links-Rechts-Wendestelle.



Die Funktion $f(x)$ wird als Graph (schwarz) dargestellt. Auf dem Graphen ist der Punkt P beweglich und verschiebbar. Bewege ihn hin und her! Mit dem Punkt P wird eine Vertikale (orange gestrichelt) angezeigt. Überlege dir mit dem sicheren Gefühl und dem Wissen aus den vorangegangenen Aufgaben, an welchen Stellen x die Funktion $f(x)$ Extrema als auch Wendepunkte haben könnte. Notiere dir zur Kontrolle die Abszissenwerte dieser Punkte.

Seite 128, Aufgabe Bedingung Wendestellen – notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunkte

1. Blende jetzt die Extrema als auch die Wendepunkte von $f(x)$ ein. Sie werden mit E_{1f} (Extrempunkt 1 der Funktion $f(x)$) und mit W_{if} (Wendepunkt i der Funktion $f(x)$) angezeigt.
2. Blende nun die erste Ableitung $f'(x)$ ein.
3. Die Extrema einer Funktion lassen sich besser lokalisieren, wenn die Tangente zur Verfügung steht. Blende nun die Tangente an die 1. Ableitung $f'(x)$ (blau gestrichelt in Punkt P_1) ein und steuere mit dem Punkt P diese Tangente in die Horizontalpositionen mit der Steigung von Null. Dort sollten die Extrema der 1. Ableitung liegen.
4. Jetzt wollen wir die Extrema der 1. Ableitung sehen. Sie werden mit E_{j1} (Extrema j der 1. Ableitung) angezeigt. Und siehe da, es gibt Übereinstimmung zwischen den Extremstellen der 1. Ableitung und den Wendestellen der Funktion $f(x)$. Was als Bedingung für Extrema der Funktion gilt, das gilt auch für Extrema der 1. Ableitung dieser Funktion. Die Ableitung der jeweiligen Funktion ist gleich null zu setzen, das war eine notwendige Bedingung. Wenn aber die Ableitung der Ableitung einer Funktion gleich null zu setzen ist, dann wird die 2. Ableitung dieser Funktion gleich null zu setzen sein. Dann geht es also um die Nullstellen der 2. Ableitung der Funktion $f(x)$.
5. Blende dir jetzt die 2. Ableitung $f''(x)$ ein und schaue dir die Nullstellen der 2. Ableitung an. Tatsächlich fallen Nullstellen der 2. Ableitung mit den Extrema der 1. Ableitung und den Wendepunkten von $f(x)$ zusammen.
6. Blende dir die Nullstellen der 2. Ableitung ein. Diese werden mit N_{k2} (Nullstelle k der 2. Ableitung) angezeigt.
7. Überprüfe jetzt, ob die Klärung eines eindeutigen Sachverhaltes zu Wendepunkten von $f(x)$ mit der 3. Ableitung $f'''(x)$ zu machen ist. Da die 3. Ableitung die Steigung der Funktion der 2. Ableitung beschreibt, solltest du dir jetzt die Tangente an die 2. Ableitung anschauen. Blende dazu diese ein (grün gestrichelt in Punkt P_2) und fahre mit dem Punkt P die Wendestellen der Funktion $f(x)$ an.

Seite 128, Aufgabe Bedingung Wendestellen – notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunkte

8. Da die Steigung der Tangente an die 2. Ableitung mit der 3. Ableitung zu haben ist, solltest du diese jetzt einblenden. Die Funktionswerte von $f'''(x)$ repräsentieren die Steigungen der Tangente an die 2. Ableitung.

9. Nun sollte zu Wendepunkten alles klar sein. Um dies am Schluss nochmals zu testen, blende nunmehr die Wendepunkte der 1. Ableitung ein. Vergleich diese Stellen mit den Nullstellen der 3. Ableitung.

10. Fazit
 - a) In den Wendepunkten der Funktion $f(x)$ hat die 2. Ableitung von $f(x)$ den Wert null.
Bedingung für Wendepunkte: $f''(x)=0$
Wenn wir diese Gleichung nach x auflösen, dann erhalten wir die Wendestellen x_W für die Funktion $f(x)$, an denen Wendepunkte auftreten können.

 - b) Diese Bedingung ist aber keine "hinreichende" Bedingung, sondern nur eine "notwendige" Bedingung, da es neben den Extrema auch Sattelpunkte für die 1. Ableitung gibt, für die diese Bedingung auch zutrifft.
Die Bedingung $f''(x)=0$ für die Existenz von Wendepunkten ist eine "notwendige", aber keine "hinreichende" Bedingung.

 - c) Wendepunkte einer Funktion $f(x)$ korrespondieren zu den Extrema ihrer 1. Ableitung $f'(x)$. Ein Links-Rechts-Wendepunkt von $f(x)$ hat mit dem Maximum von $f'(x)$ eine gemeinsame Stelle, ein Rechts-Links-Wendepunkt von $f(x)$ mit dem Minimum von $f'(x)$.

 - d) An Links-Rechts-Wendestellen ist die 3. Ableitung von $f(x)$ negativ, an Rechts-Links-Wendestellen positiv.

 - e) An Sattelpunkten der 1. Ableitung ist ebenfalls $(f'(x))' = f''(x)$ gleich null. Diese führen aber nicht zu Wendepunkten von $f(x)$. An diesen Stellen ist die 3. Ableitung gleich Null. Daraus können wir das "hinreichende" Kriterium für die Existenz von Wendepunkten ableiten, in dem wir diese Sattelpunkte ausschließen.