ERGÄNZENDE SACHINFORMATIONEN

Zahlenspielereien zur Teilbarkeit von Zahlen

Die folgenden Aufgaben können auf verschiedene Weise verwendet werden:
- Durch entsprechendes Probieren können die Kinder selbst entsprechende Vermutungen über eine mögliche „Regel" aufstellen.
- Eine vorgegebene Regel kann durch Probieren induktiv überprüft werden.
- Bei leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern können die (an sich für Lehrerinnen und Lehrern gedachten) Begründungen erarbeitet werden.

1. Schreibe eine beliebige dreistellige Zahl an.
   Bilde durch Umordnen der Ziffern eine neue Zahl.
   Berechne die Differenz der beiden Zahlen.
   Überprüfe: Die Differenz ist stets durch 9 teilbar.

   Beispiel: Gewählte Zahl 517; umgeordnete Zahl zB 175;
   517 – 175 = 342; 342 : 9 = 38

   Begründung: Die Ziffernsumme beider Zahlen hat denselben Neunerrest. Die Ziffernsumme der Differenz hat daher den Neunerrest null und ist deshalb stets durch 9 teilbar.

2. Verfahre wie in Aufg. 1 mit einer beliebigen vierstelligen Zahl.

   Beispiel: Gewählte Zahl 1 256; umgeordnete Zahl zB 5 216;
   5 216 – 1 256 = 3 960; 3 960 : 9 = 440

   Begründung: wie bei Aufg. 1.

3. Wähle zwei gerade oder zwei ungerade Ziffern.
   Berechne als dritte Ziffer den Mittelwert der beiden Ziffern.
   Bilde aus den drei Ziffern eine dreistellige Zahl.
   Überprüfe, ob die Zahl durch 3 teilbar ist.

   Beispiele: a) Gewählt: 2, 8; Mittelwert: 5; Zahl zB: $285 = 95 \cdot 3$
   b) Gewählt: 7, 1; Mittelwert: 4; Zahl zB: $147 = 49 \cdot 3$

   Begründung: Die Summe aus zwei geraden oder zwei ungeraden Ziffern $a + b$ ist eine gerade Zahl: daher existiert die Ziffer $(a + b)/2$.
   Die Ziffernsumme der aus diesen drei Ziffern bestehenden Zahl ist
   $a + b + (a + b)/2 = 3 \cdot (a + b)/2$; diese Ziffernsumme ist ein Vielfaches von 3, also ist die Zahl durch 3 teilbar.

4. Wähle zwei beliebige natürliche Zahlen.
   Bilde Summe, Differenz und Produkt der beiden Zahlen.
   Überprüfe: Mindestens eine der drei so berechneten Zahlen ist durch 3 teilbar.

   Beispiele: a) $31 + 15 = 46$; $31 - 15 = 16$; $31 \cdot 15 = 465$ (durch 3 teilbar)
   b) $32 + 14 = 46$; $32 - 14 = 18$ (durch 3 teilbar); $32 \cdot 14 = 448$
   c) $35 + 13 = 48$ (durch 3 teilbar); $35 - 13 = 22$; $35 \cdot 13 = 455$

   Begründung: Mögliche Fälle:
   (1) Eine der beiden Zahlen hat bei Division durch 3 den Rest null, ist also durch 3 teilbar. Dann ist auch das Produkt, das diesen Faktor enthält, durch 3 teilbar.
   (2) Beide Zahlen haben bei Division durch 3 denselben Rest; dann hat die Differenz bei Division durch 3 den Rest null und ist daher durch 3 teilbar.
   (3) Eine der Zahlen hat bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2. Dann hat die Summe bei Division den Rest null und ist daher durch 3 teilbar.

5. Wähle zwei beliebige natürliche Zahlen.
Bilde die Summe und das Produkt der beiden Zahlen.
Überprüfe: Die Summe oder das Produkt (oder beides) ist durch 2 teilbar.

Beispiele: a) $87 + 12 = 99$; $87 \cdot 12 = 1\,044$ (teilbar durch 2)
b) $25 + 17 = 42$ (teilbar durch 2); $25 \cdot 17 = 425$

Begründung: Mögliche Fälle:
(1) Mindestens eine der beiden Zahlen ist gerade; dann ist das Produkt ebenfalls gerade und daher durch 2 teilbar.
(2) Beide Zahlen sind ungerade; dann ist die Summe gerade und daher durch 2 teilbar.

6. Schreibe eine beliebige zweistellige natürliche Zahl kleiner als 50 an. Verdopple die Zahl und füge sie an die ursprüngliche Zahl an.
Überprüfe: Die so entstandene vierstellige Zahl ist stets durch 17 teilbar.

Beispiel: Gewählt: 28; verdoppelt 56; ergibt 2 856.
$2\,856 : 17 = 168$.

Begründung: Durch die Art der Zahlenbildung wird die gewählte zweiziffrige Zahl mit 102 multipliziert.
$102 = 17 \cdot 6$, daher ist die Zahl durch 17 teilbar.

7. Schreibe eine beliebige zweistellige Zahl an.
Multipliziere die Zahl mit 5 und stelle das Ergebnis vor die ursprünglich gewählte Zahl.
Überprüfe: Die so entstandene (vier- oder fünfstellige) Zahl ist stets durch 167 teilbar.

Beispiele: a) Gewählt: 17; $17 \cdot 5 = 85$; ergibt die Zahl 8 517. $8\,517 : 167 = 51$
b) Gewählt: 43; $43 \cdot 5 = 215$; ergibt die Zahl 21 543. $21\,543 : 167 = 129$

Begründung: Durch die Art der Zahlenbildung wird die gewählte zweiziffrige Zahl mit 501 multipliziert.
$501 = 167 \cdot 3$, daher ist die Zahl durch 167 teilbar.

8. Wähle eine beliebige (zweistellige) Zahl x.
Multipliziere die Zahl mit sich selbst und subtrahiere 1.
Überprüfe: Die so erhaltene Zahl ist durch $x + 1$ und durch $x - 1$ teilbar.

Beispiel: Gewählte Zahl $x = 27$; $27 \cdot 27 - 1 = 728$;
$x + 1 = 28$; $x - 1 = 26$; $728 : 28 = 26$

Begründung: Nach der Horner-Regel gilt: $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$.

9. Wähle eine ungerade Zahl u. Bilde $u \cdot u - 1$.
Überprüfe: Die so entstandene Zahl ist stets durch 8 teilbar.

Beispiel: $u = 13$; $u \cdot u - 1 = 169 - 1 = 168$; $168 : 8 = 21$

Begründung: Nach der Horner-Regel ist $u^2 - 1 = (u - 1) \cdot (u + 1)$
Wenn u eine ungerade Zahl ist, dann sind $(u - 1)$ und $(u + 1)$ zwei aufeinander folgende gerade Zahlen, von denen eine durch 4 teilbar ist.

10. Wähle eine beliebige (zweistellige) Zahl x.
Bilde $x \cdot x \cdot x$ und addiere 1.
Überprüfe: Die so erhaltene Zahl ist durch $x + 1$ teilbar.

Beispiel: Gewählt: $x = 13$; $x \cdot x \cdot x + 1 = 2\,197 + 1 = 2\,198$;
$x + 1 = 14$; $2\,198 : 14 = 157$

Begründung: Nach der Horner-Regel gilt: $x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$