43 Allgemeine Relativitätstheorie

Vertiefung und Kompetenzüberprüfung

Martin Apolin (Stand August 2012)

Das Äquivalenzprinzip und lokale Inertialsysteme

A1 Was versteht man unter der "Masse"? Kann man Masse mit Materie gleichsetzen? Was versteht man unter "Invarianz der Masse"? Was soll man sich unter der "Massenzunahme" vorstellen? Werde Objekte dadurch irgendwie dicker (Abb. 1)?

Abb. 1: Ist diese Veranschaulichung von Massenzunahme richtig?

A2 Was misst eine Waage? Die Masse oder das Gewicht? Und was ist überhaupt der Unterschied zwischen Masse und Gewicht?

A3 Badezimmerwaage und Balkenwaage: Welche der beiden würde auch am Mond richtig messen?

A4 Im Weltall schwebt ein einsamer Tisch, auf den du die Erde legst! Wie viel würde die Erde wiegen?

Abb. 2 (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 7.18, S. 61, BB5).

A5 Zeige allgemein, dass die Beschleunigung im freien Fall nur von der Stärke des Gravitationsfeldes abhängt, aber nicht von der Masse. Verwende dazu die Formeln $F_G = G\frac{mM}{r^2}$ und $F = ma$. Was beschreiben diese Gleichungen? Bei welcher der Massen (m und M) handelt es sich um träge und schwere Massen?

A6 Frage 1: Du befindest dich in einem Aufzug, als das Seil reißt und die Kabine in die Tiefe stürzt. Was würdest du im Inneren bemerken? Frage 2: Astronauten im Space Shuttle oder der ISS sind schwerelos, weil … ? Beantworte beide Fragen! Stelle weiters einen Zusammenhang zwischen beiden Fragen, Abb. 3 und der Antwort auf A5 her.

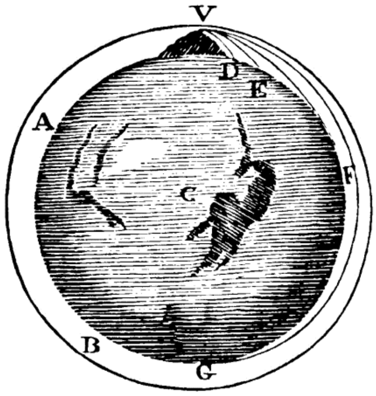

Abb. 3: Flugbahnen bei verschiedenen Abwurfgeschwindigkeiten. Es handelt sich hier um eine Originalzeichnung Newtons.

A7 Um Astronauten auf die Schwerelosigkeit vorzubereiten, trainieren sie vorher in umgebauten und gut ausgepolsterten Flugzeugen (Abb. 4). Wie kann man im Inneren eines Flugzeuges Schwerelosigkeit herstellen?

Abb. 4: Astronauten bereiten sich 1959 im Rahmen des Mercury-Projekts auf die Schwerelosigkeit vor (Quelle: NASA).

A8 In Abb. 5 siehst du links eine Kerze unter Normalbedingungen und rechts eine im freien Fall. Wie kannst du Form und Farbe begründen?

Abb. 5 (Quelle: NASA)

A9 Begründe mit Hilfe von Abb. 6 auf der nächsten Seite, warum aus dem Äquivalenzprinzip direkt folgt, dass auch Licht im Gravitationsfeld abgelenkt werden muss. Versuche dazu eine Skizze zu machen!

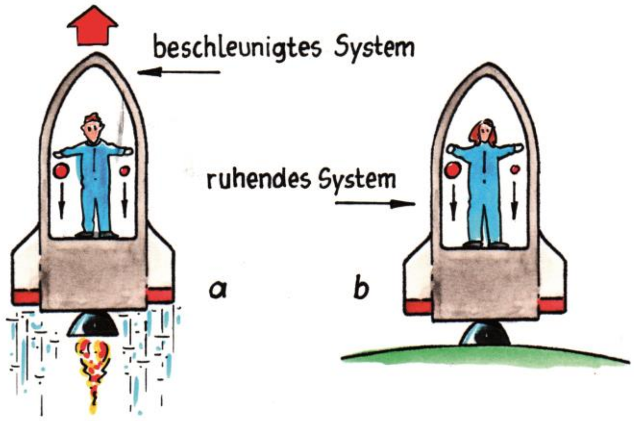

Abb. 6: Es ist nicht zu unterscheiden, ob ein Raumschiff fernab aller Himmelskörper beschleunigt (a) oder auf der Erde steht (b). Bei a wirkt die träge Masse, bei b die schwere (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 43.3, S. 38).

A10 Ein Apfel fällt vom Baum auf den Boden. Versuche diesen einfachen Vorgang aus Sicht der klassischen Mechanik sowie der ART zu beschreiben. Wer befindet sich im Inertialsystem?

A11 Ein Astronaut fühlt sich schwerelos, weil sich die Zentripetalkraft (die Gravitation) und Zentrifugalkraft aus seiner Sicht genau aufheben (Abb. 7 links). In einer ringförmigen Raumstation kann man durch Drehung eine künstliche Gravitation erzeugen (rechts). Dann heben sich aus Sicht des Astronauten Zentripetalkraft (Druck vom Boden) und Zentrifugalkraft genau auf. Aber wie können Schwerelosigkeit und künstliche Gravitation auf scheinbar gleiche Weise zustande kommen? Das ist doch paradox!

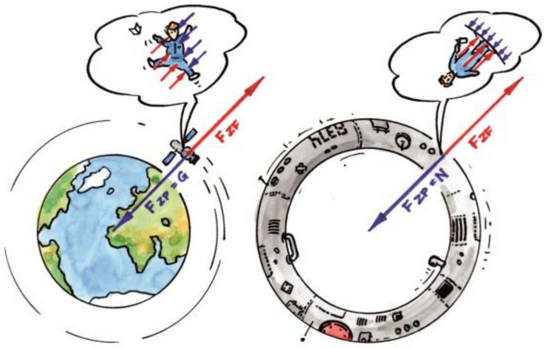

Abb. 7: Kräfte aus der Sicht des rotierenden Systems (Grafik: Janosch Slama)

A12 Man kann sagen: In einem Gravitationsfeld frei fallende Bezugssysteme sind Inertialsysteme. Allerdings gilt das nur für kleine räumliche Ausdehnungen. Begründe mit Hilfe von Abb. 8. Erkläre weiters, welche Rolle der Begriff "Gezeitenkraft" in diesem Zusammenhang spielt (siehe A30)!

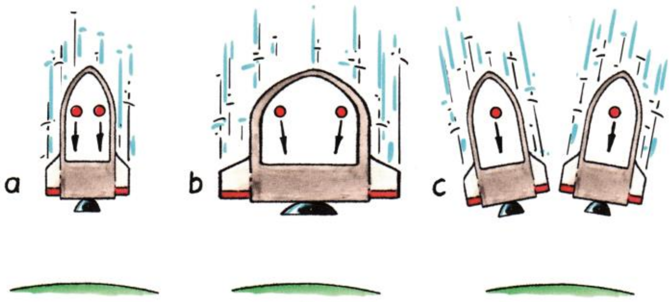

Abb. 8 zu A12
(Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 43.11, S. 41)

A13 Nimm an, man entdeckt eine Substanz, für die träge und schwere Masse *nicht* gleich groß sind. Welche Auswirkungen hätte das auf die klassische Mechanik und auf die ART? Hilf dir mit den Antworten auf A5 und A9 und mit Abb. 6!

Frequenzverschiebung und Zeitveränderung im Gravitationsfeld

A14 a Dein Raumschiff wird von einem Meteor verfolgt (Abb. 9 A). Wie verändern sich dessen Relativgeschwindigkeit und Energie, wenn du das Raumschiff beschleunigst? Dein Raumschiff wird von einem Photon verfolgt (B). Wie ist es in diesem Fall?

Abb. 9 (Grafik Janosch Slama; siehe auch Abb. 42.2, S. 31)

A14 b Vergleiche die Rotverschiebung durch das Beschleunigen des Raumschiffs (A14 a) mit der Rotverschiebung im Gravitationsfeld! Welche Gemeinsamkeiten gibt es?

A15 Leite die Gleichung für die Frequenzverschiebung eines Photons im homogenen Erdschwerefeld und im inhomogenen Feld einer beliebigen Zentralmasse ab. Was du dazu benötigst: Die Energie eines Photons ($E = hf$), die Gleichung $E = mc^2$, die Formel für die Hebearbeit im homogenen Feld

$W_H = mgH$ und letztlich die Formel für die Hebearbeit im inhomogenen Feld $W_H = mGM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$.

A16 Um welchen Faktor verändert sich die Frequenz von Licht, wenn es von der Erdoberfläche 10 km aufsteigt? Wie viel Hertz entspricht das absolut? Nimm für deine Berechnungen grünes Licht mit $6 \cdot 10^{14}$ Hz. Rechne mit beiden Gleichungen aus A15 und interpretiere das Ergebnis sowie die Unterschiede in den Ergebnissen. Die Masse der Erde beträgt $6 \cdot 10^{24}$ kg, der Radius der Erde liegt bei 6370 km, die Gravitationskonstante *G* hat den Wert $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻² und *g* beträgt 9,81 m/s².

A17 Schätze ab, um wie viele Sekunden dein Kopf im Laufe eines Lebens schneller altert als deine Füße. Schätze ab, um wie viele Sekunden jemand im Laufe seines Lebens langsamer altert, wenn er am Meer wohnt und nicht auf 2000 m Seehöhe. Verwende die Gleichung $T_A = T_B\left(1 - \frac{gH}{c^2}\right)$.

A18 Im Alltag spielen SRT und ART keine Rolle, weil die Effekte zu klein sind. Es gibt nur eine einzige Situation, in der die Effekte groß genug sind, damit sie ohne Korrektur zu unangenehmen Ergebnissen führen würden. Welche Situation ist gemeint?

A19 GPS steht für Global Positioning System (Abb. 10). Es ist ein militärisches Navigationssystem und wurde ursprünglich nicht für die zivile Navigation entwickelt. Um dieses System vor Missbrauch durch andere militärische Einheiten zu schützen, wurde ein Teil der Satellitensignale verschlüsselt, wodurch die Genauigkeit extrem litt. Im Jahr 2000 wurde der Störfilter abgeschaltet, und seitdem ist GPS auch für Privatpersonen nutzbar.

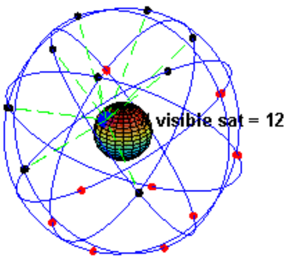

Abb. 10: Die Bahnen der GPS-Satelliten (Quelle:Wikipedia)

Knapp 30 Satelliten mit Atomuhren an Bord umkreisen die Erde im Abstand von etwa 20.200 km. Sie machen im Prinzip nichts anderes, als ihre Zeit zu funken. Weil sie von dir unterschiedlich weit weg sind, dauern die Laufzeiten aber verschieden lang. Dein GPS-Gerät empfängt daher leicht verschiedene Zeitangaben und kann daraus den Abstand zu den Satelliten rekonstruieren. Weil sich diese auf genau bekannten Bahnen bewegen, ist ihre momentane Position somit immer bekannt. Aus der Position der Satelliten und deinem Abstand zu ihnen kann der GPS-Empfänger seine eigene Position und somit auch deine auf der Erde auf wenige Meter genau bestimmen.
Der genaue Gang der Uhren an Bord der Satelliten ist also für die Bestimmung des Abstandes und somit deiner eigenen Position extrem wichtig. Und hier kommt die Relativitätstheorie ins Spiel. Es gibt nämlich zwei gegenläufige Effekte, die auf diese Uhren wirken. Sehen wir uns das der Reihe nach an.

a Berechne, welche Geschwindigkeit die Satelliten relativ zur Erdoberfläche haben. Verwende dazu die Gleichungen $F_G = G\frac{mM}{r^2}$ sowie $F_{ZP} = \frac{mv^2}{r}$. Der Radius der Erde beträgt 6370 km, *G* hat den Wert $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻² und für die Masse der Erde nehmen wir den genaueren Wert $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

b Berechne, um welchen Faktor die Uhr des Satelliten im Rahmen der SRT auf Grund ihrer Geschwindigkeit relativ zur Erde anders geht. Verwende die Gleichung $t_s = t_E\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, den Wert *c* = $3 \cdot 10^8$ m/s und das Ergebnis von A19 a.

c Berechne, um welchen Faktor die Uhr des Satelliten im Rahme der ART auf Grund der geringeren Gravitation anders geht. Rechne exakt und verwende die Gleichung $T_E = T_S\left(1 - \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_S}\right)\right)$.

d Welcher der beiden Effekte "gewinnt"? Um welchen Faktor gehen daher die Uhren in den Satelliten anders? Wie hat man das Problem sehr elegant gelöst?

A20 Wie groß wäre der Fehler in der Positionsbestimmung beim GPS (siehe A19), wenn wir von diesen notwendigen Korrekturen nichts wüssten - oder sie einfach ignorieren würden? Verwende das Ergebnis aus A19 d.

Längenveränderung, Raumkrümmung und Lichtablenkung

A21 Ein Bär geht 1 km nach Süden, 1 km nach Westen und zum Schluss 1 km nach Norden. Dann ist er wieder dort, wo er weggegangen ist. Welche Farbe hat der Bär?

A22 In Abb. 11 siehst du einen Lichtstrahl, der am Rande der Sonne vorbeiläuft und durch deren Gravitation abgelenkt wird. Man kann diese Ablenkung damit argumentieren, dass das Photon ein Massenäquivalent von $m = E/c^2 = hf/c^2$ besitzt und somit von der Schwerkraft abgelenkt wird. Man kann es aber auch anders begründen. Nimm an, dass der Lichtstrahl eine gewisse Breite besitzt. Was bedeutet eine Ablenkung für die Geschwindigkeit des Lichts an der Ober- bzw. Unterseite des Strahls? Und wie kann man diesen Unterschied begründen?

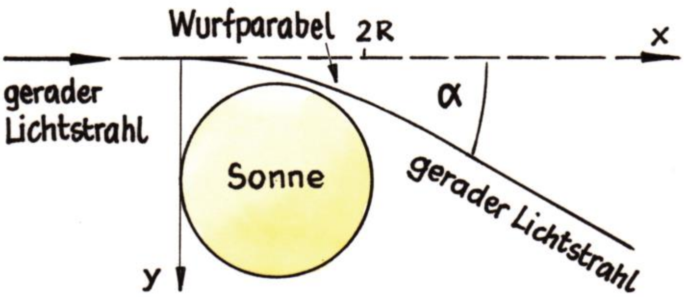

Abb. 11: Abschätzung der Lichtablenkung. Wir nehmen vereinfacht an, dass die Schwerkraft der Sonne nur im Bereich zwischen x = 0 bis 2R wirksam ist (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 43.28, S. 47).

A23 Schätze die Ablenkung eines Lichtstrahls am Rande der Sonne ab (Abb. 11). Wir berechnen zuerst nur den Effekt, der durch die Gravitation (bzw. die Verlangsamung der Zeit; siehe A22) zu Stande kommt.

a Wie groß ist die Fallbeschleunigung *a* direkt am Rand der Sonne allgemein ausgedrückt? Verwende dazu das Newton'sche Gravitationsgesetz, das 2. Newton'sche Grundgesetz und Abb. 11.

b Wenn das Licht seine Richtung ändert, muss die *x*-Komponente seiner Geschwindigkeit etwas sinken. Weil die Ablenkung und somit die Geschwindigkeit in *y*-Richtung aber minimal sind, nehmen wir näherungsweise $x = c \cdot t$ bzw. $t = x/c$ an. Weiters gilt für die Falltiefe beim freien Fall $y = -\frac{a}{2}t^2$. Stelle damit und mit dem Ergebnis aus A23 a die Gleichung für die Wurfparabel in Bereich 0 bis 2*R* auf, also $y(x) = \ldots$.

c Nun nehmen wir vereinfacht an, dass die Schwerkraft nur im Teil $x = 0$ bis $2R$ wirksam ist (Abb. 11) und das Licht danach gerade weiterläuft. Die Ablenkung des Lichtstrahls entspricht daher der Steigung *k* der Wurfparabel (siehe Ergebnis A23 b) bei 2*R*. Berechne diese Steigung der Kurve durch Differenzieren.

d Die Steigung $k = y/x = \tan \alpha$. Für kleine Winkel gilt $\tan \alpha \approx \alpha$. Berechne damit und mit dem Ergebnis aus A23 c die Ablenkung in Winkelsekunden. Berücksichtige, dass der tatsächliche Wert der Ablenkung durch die Raumkrümmung doppelt so groß ist wie berechnet (wir haben nur die Verlangsamung der Zeit berücksichtigt). *G* hat den Wert $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}, die Sonnenmasse *M* beträgt $2 \cdot 10^{30}$ kg und der Sonnenradius *R* $7 \cdot 10^8$ m.

A24 In Abb. 12 siehst du die Auswertung des Shapiro-Experiments von 1965. Was wurde dabei gemessen? Berechne mit Hilfe der Abbildung, um wie viel länger der Weg von der Erde zur Venus durch die "Raumbeule" ist als klassisch erwartet.

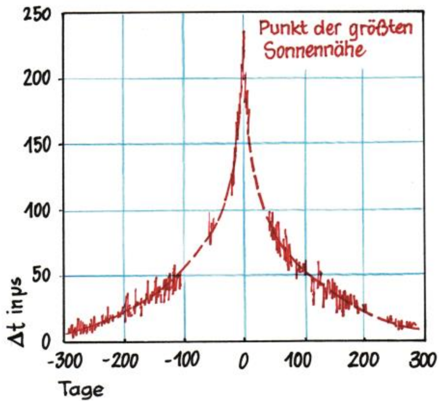

Abb.12: Die Auswertung des Shapiro-Experiments (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 43.24, S. 46).

A25 In Abb.13 (nächste Seite) siehst du eine Simulation eines masselos angenommenen Begleitsterns (rot) hinter einem Neutronenstern (blau). Geometrie und Farbgebung der dargestellten Szene sind astrophysikalisch völlig unrealistisch - in dieser Nähe zum Neutronenstern wäre ein Begleiter nicht stabil. Sie wurde so gewählt, dass der Effekt deutlich zu sehen ist. Wie kannst du diesen Effekt qualitativ erklären? Verwende für deine Erklärung auch Abb. 14.

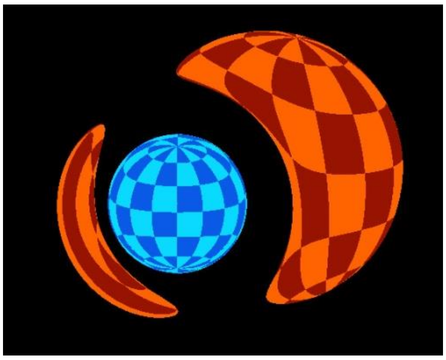

Abb. 13 (Bild: Corvin Zahn, Institut für Physik, Universität Hildesheim, Tempolimit Lichtgeschwindigkeit (www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de)

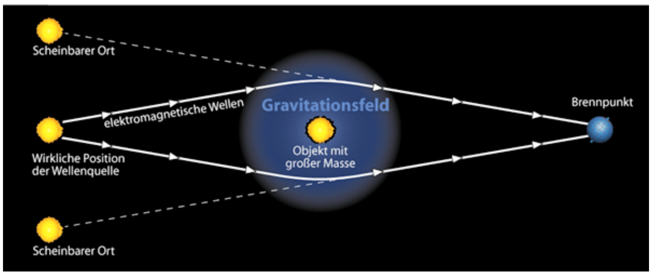

Abb. 14: Schematische Darstellung der Wirkungsweise einer Gravitationslinse (Quelle: Wikipedia).

Schwarze Löcher und Wurmlöcher

A26 Die Hebearbeit bzw. potenzielle Energie in einem inhomogenen Gravitationsfeld mit der Zentralmasse *M* lautet $E_p = W_H = mGM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$. Leite gemeinsam mit der Formel für die kinetische Energie $E_k = \frac{mv^2}{2}$ eine allgemeine Formel für die Fluchtgeschwindigkeit ab.

A27 Die Fluchtgeschwindigkeit, um der Gravitation einer Masse zu entkommen, ist proportional zu $1/\sqrt{r}$ (siehe A26). Je näher man also einer Masse kommt, desto größer wird die Fluchtgeschwindigkeit. Bei einem bestimmten Abstand *r* gilt *v* = *c*. Dann kann nicht einmal mehr das Licht entkommen. Diesen Abstand nennt man den Schwarzschildradius R_S. Leite die Gleichung für R_S mit Hilfe der Antwort auf A26 ab.

A28 a Berechne allgemein die kritische Dichte ρ_C, ab der eine kugelförmige Masse zu einem schwarzen Loch zusammenstürzt. Verwende dazu die Gleichungen $V_{Kugel} = \frac{4r^3\pi}{3}$, $\rho = \frac{M}{V}$ und die Gleichung für den Schwarzschildradius aus A27.

A28 b Erstelle mit Hilfe der Gleichung aus A28 a ein Diagramm, in dem du auf der x-Achse die Masse und auf der y-Achse die kritische Dichte eines Schwarzen Lochs einträgst. Interpretiere das Diagramm! Zeichne in das Diagramm weiters die vermutete Masse (10^{54} kg) und Dichte (10^{-26} kg/m³) des sichtbaren Universums ein. Was ist das Interessante dabei?

A29 Ist die Aussage "Schwarze Löcher haben deshalb eine so verheerende Wirkung, weil ihre Masse so groß ist!" richtig oder falsch? Was würde passieren, wenn die Sonne plötzlich bei gleicher Masse ein Schwarzes Loch wäre (was natürlich nicht passieren kann)? Würde es die Erde und alle anderen Planeten verschlingen? Begründe mit Hilfe von Abb. 15 und dem Newton'schen Gravitationsgesetz $F_G = G\frac{mM}{r^2}$.

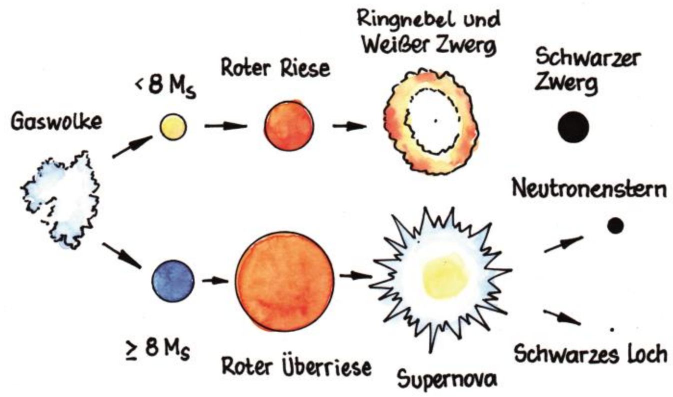

Abb. 15: Die drei möglichen Endstadien der Sterne. Rote Zwerge werden direkt Weiße Zwerge, ohne vorher Rote Riesen gewesen zu sein. Hat ein Stern über 8 Sonnenmassen, so endet sein Leben sehr spektakulär mit einer Supernova und kann dann zu einem Schwarzen Loch werden. Die leichtesten stellaren (also aus Sternen entstandenen) Schwarzen Löcher haben vermutlich um 4 Sonnenmassen (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 48.17, S. 96).

A30 a Was versteht man allgemein unter einer Gezeitenkraft? Erkläre mit Hilfe von Abb. 16!

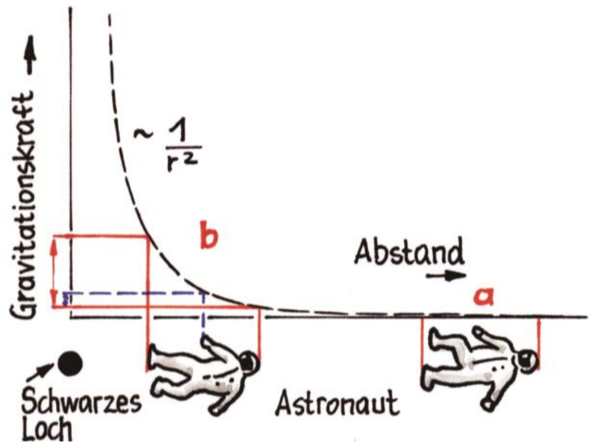

Abb. 16: Der Unterschied der Gravitationskräfte, die auf Kopf und Füße eines Astronauten in der Nähe eines Schwarzen Lochs wirken (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 10.28, S. 105).

A30 b Versuche eine allgemeine Formel für die Gezeitenbeschleunigung abzuleiten. Gehe dazu vom Gravitationsgesetz aus (siehe Angabe zu A5). Bedenke, dass die Teile eines Objekts, die sich näher bei der Zentralmasse befinden, auch stärker angezogen werden. Nimm für die Abstände r und $(r - \Delta r)$, wobei Δr die Größe des Objekts darstellt. Für deine Ableitung brauchst du folgende Reihenentwicklung $(\Delta r << r)$: $\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} = 1 + 2\Delta r/r + 3(\Delta r/r)^2 \ldots$.

A31 a Berechne zunächst den Schwarzschildradius eines Schwarzen Lochs mit 10 Sonnenmassen bzw. 4,3 Millionen Sonnenmassen. Ersteres kann durch eine Supernova am Ende des Lebens eines massereichen Sterns entstehen (siehe Abb. 15), zweiteres wird im Zentrum unserer Milchstraße vermutet. Verwende die Formel für den Schwarzschildradius aus A27. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt etwa $3 \cdot 10^8$ m/s, die Sonnenmasse rund $2 \cdot 10^{30}$ kg und $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}.

A31 b Schätze ab, welche Gezeitenbeschleunigung ein Astronaut maximal aushalten kann, wenn er mit Kopf oder Füßen in Richtung Schwarzes Loch fällt, ohne dass er auseinander gerissen wird. Natürlich bist du hier auf eine wirkliche Vermutung angewiesen!

A31 c Schätze nun die Gezeitenbeschleunigung ab, die auf einen Astronauten wirkt, wenn er mit den Füßen zuerst in die in A31 a erwähnten Schwarzen Löcher fällt. Überlege, in welchem Abstand vom Schwarzen Loch die kritische Gezeitenbeschleunigung erreicht wird. Vergleich dein Ergebnis mit dem Schwarzschildradius.

A31 d Es wurde schon viel darüber spekuliert, ob man zwei Schwarze Löcher zur Reise durchs All verwenden könnte, wenn sie durch ein so genanntes Wurmloch in Verbindung stünden (Abb. 17). Dieses könnte ein Abkürzer durch den Raum sein, weil sich dieser in der Nähe von Schwarzen Löchern unendlich stark krümmt. Damit ein Astronaut unbeschadet durch ein Wurmloch fliegen kann, muss er aber den Schwarzschildradius durchqueren können, ohne auseinander gerissen zu werden. Ist das bei unseren beiden Schwarzen Löchern der Fall?

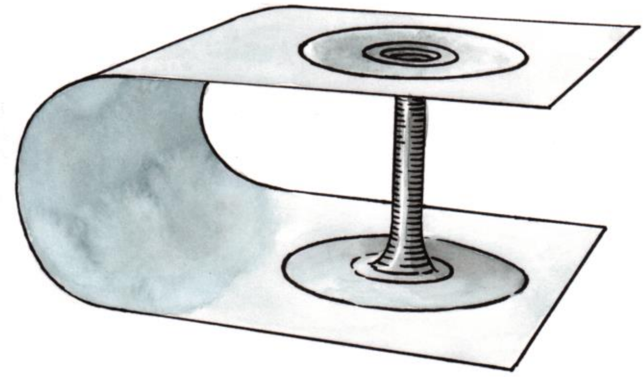

Abb. 17: Ein Wurmloch ist die Abkürzung durch eine höhere Dimension. Dadurch könnte man – reine theoretisch – Abkürzer im Raum erzeugen (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 13.29).

e Schätze allgemein ab, wie groß die Masse eines Schwarzen Lochs sein muss, damit man am Schwarzschildradius *nicht* „spaghettisiert" wird und unbeschadet durch das Wurmloch fliegen kann. Nimm dazu an, dass die Gezeitenbeschleunigung am Schwarzschildradius maximal 10 *g* betragen darf (siehe A31 b) und drücke das Ergebnis in Sonnenmassen aus.

A32 Ein Astronaut stürzt in ein Schwarzes Loch. Wie sieht der Vorgang aus Sicht des Astronauten selbst und einer unendlich weit entfernten Person aus?

Hilfe zu A1: Die Masse ist, trocken gesagt, eine Eigenschaft der Materie. Sie hat zwei Erscheinungsformen. Da ist einmal der Widerstand jedes Gegenstandes gegenüber Geschwindigkeitsveränderungen. Das nennt man die Trägheit eines Gegenstandes und sie wird durch die träge Masse hervorgerufen. Je größer diese ist, desto mehr Kraft braucht man, um die Geschwindigkeit des Gegenstands zu verändern. Auf der anderen Seite werden massenreichere Objekte durch die Gravitation stärker angezogen. Das nennt man die schwere Masse. In beiden Fällen ist die Einheit das kg, und für ein und denselben Gegenstand sind träge und schwere Masse exakt gleich groß! Die Masse eines Gegenstandes ist im gesamten Universum gleich groß. Sie ändert sich nicht. 1 kg bleibt immer 1 kg, egal ob es sich auf der Erde, auf dem Mond oder in der nächsten Galaxis befindet. Man spricht daher von der Invarianz (Unveränderlichkeit) der Masse. Wenn man sagt, dass bei einem schnell bewegten Objekt die Masse größer wird, dann ist es nicht „dicker“ geworden. Es ist also nicht auf einmal mehr Materie da, sondern das Objekt hat z. B. eine größere Trägheit bekommen. Es ist dann schwerer abzustoppen und auch die benötigte Zentripetalkraft für eine Kreisbahn wächst, so wie bei den Protonen im LHC.

Hilfe zu A2: Wenn man sich über den Unterschied zwischen Masse und Gewicht unterhält, dann gibt es ein Riesenproblem: Im Alltag wird zwischen den beiden nicht unterschieden! In der Physik ist es aber so: Die Gewichtskraft (F_G) oder kurz „das Gewicht“ ist die Kraft, mit der eine Masse von der Erde anzogen wird, oder generell gesagt, mit der eine Masse von einer anderen Masse angezogen wird. Es gilt $F_G = mg$. Was sind also die Unterschiede zwischen Masse und Gewicht? Die Masse ist ein Skalar. Sie wird also nur einen Zahlenwert beschrieben und hat keine Richtung. Die Gewichtskraft ist ein Vektor und zeigt in Richtung Erdmitte. Die Masse eines Gegenstands ist im gesamten Universum immer gleich groß. Das Gewicht eines Gegenstands hängt hingegen davon ab, wo sich dieser befindet.
Was misst nun eine Waage, z. B. deine Badezimmerwaage? Sie misst, wie stark du von der Erde angezogen wirst. Also misst sie dein Gewicht! Würdest du dich am Mond wiegen, würde die Waage nur mehr 1/6 anzeigen, obwohl deine Masse ja nicht gesunken ist. Und im Weltall würde die Waage (fast) gar nichts mehr anzeigen. Jetzt kommt aber die große Verwirrung: Auf der Waage stehen nämlich kg drauf. Das heißt, dass eine Waage das Gewicht in Masse „übersetzt“. Jede Waage ist somit aber nur für ein bestimmtes g geeicht.

Hilfe zu A3: Der Unterschied zwischen Badezimmerwaage und Balkenwaage ist, dass die Badezimmerwaage das Gewicht misst und die Balkenwaage die Gewichte vergleicht. Deswegen funktioniert die Balkenwaage am Mond immer noch, weil *alles* leichter geworden ist und dadurch die Relationen wieder stimmen (Abb. 18).

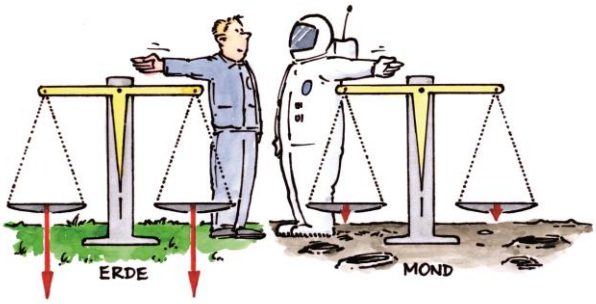

Abb. 18: Gewichtskräfte auf Erde und Mond bei einer Balkenwaage. Weil beide Kräfte sinken, kann man mit der Balkenwaage am Mond trotzdem messen (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 7.20, S. 62, BB5).

Hilfe zu A4: Wie viel wiegt die Erde auf einem Tisch im Weltall? Erde und Tisch ziehen einander mit derselben Kraft an. Was heißt das? Ein Tisch mit zum Beispiel 20 kg wiegt auf der Erde rund 200 N. Also wiegt die Erde am Tisch ebenfalls 200 N. Du kannst das Experiment sogar selbst durchführen. Du musst dazu nur einen Tisch verkehrt auf den Boden legen (Abb. 19). Und zur Messung der Kraft könntest du eine mit Newton geeichte Waage dazwischen legen!

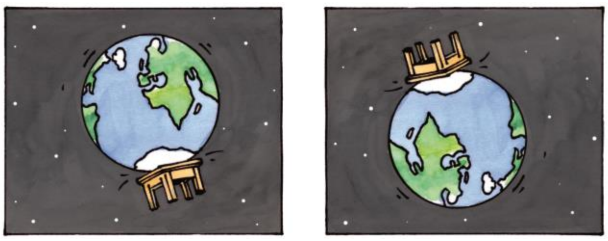

Abb. 19: Zwei Gegenstände ziehen einander gegengleich mit derselben Kraft an. Beide Ansichten sind daher richtig: Der Tisch auf der Erde wiegt 200 N. Die Erde am Tisch wiegt 200 N (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 7.21, S. 62, BB5).

Hilfe zu A5: Bei der ersten Gleichung handelt es sich um das Newton'sche Gravitationsgesetz. Es gibt an, wie stark einander zwei Massen anziehen. Es handelt sich daher um schwere Massen. Man kann daher schreiben $F_G = G\frac{m_s M_s}{r^2}$. Bei der zweiten Gleichung handelt es sich um die Bewegungsgleichung (2. Newton'sches Grundgesetz). Diese beschreibt, wie viel Kraft man benötigt, um eine Masse zu beschleunigen. Es handelt sich in diesem Fall daher um die träge Masse, und man kann schreiben $F = m_\mathrm{T}a$. Beide Gleichungen beschreiben die Kraft, die auf eine Masse wirkt. Man kann sie daher gleichsetzen $G\frac{m_s M_s}{r^2} = m_\mathrm{T}a$ und nach a auflösen: $a = \frac{m_s}{m_\mathrm{T}}\frac{GM_s}{r^2}$. Wenn träge und schwere Masse aber immer gleich groß sind, dann ist der Quotient $\frac{m_s}{m_\mathrm{T}}$ immer exakt 1, und somit hängt die Fallbeschleunigung nur von der Stärke des Gravitationsfeldes $\frac{GM_s}{r^2}$ ab.

Hilfe zu A6: Fangen wir mit Abb. 3 an. Wenn du ein Objekt einfach loslässt, etwa einen Apfel, dann fällt es auf Grund der Gravitation senkrecht zu Boden. Wenn du ihn wirfst, fliegt er umso weiter, je schneller er ist. Der Grund, dass es schließlich doch zu Boden fällt, ist immer noch derselbe: die Gravitation der Erde. Bei einer horizontalen Abwurfgeschwindigkeit von knapp 8 km/s passiert nun aber etwas Verblüffendes: Der Apfel fliegt auf einer Kreisbahn um die Erde. Er befindet sich aber immer noch im freien Fall! Beim Fallen des Aufzugs (Frage 1) und beim Fallen einer Raumstation um die Erde (Frage 2) handelt es sind also im Prinzip um eine Bewegung unter denselben Bedingungen. Weil alle Gegenstände ungeachtet ihrer Masse gleich stark beschleunigt werden (A5), also der Aufzug und du bzw. die Raumstation und der Astronaut, verschwindet in beiden Fällen für den mitfallenden Beobachter scheinbar die Gravitation - sie werden schwerelos.

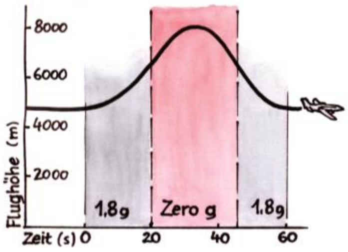

Abb. 20 zu A7: Parabelflug: Der Teil im Zero-*g*-Bereich entspricht einer Wurfparabel, also einer Bahn, die ein frei fallendes Objekt beschreiben würde (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 6.4, S. 51, BB5).

Hilfe zu A7: Die kurze und nicht ganz exakte Antwort lautet: Das Flugzeug muss sich dabei im freien Fall befinden (siehe auch A6). Die längere Antwort lautet: Natürlich kann ein Flugzeug nicht frei fallen, weil es Luftwiderstand und Auftrieb erfährt. Ein erfahrener Pilot kann aber so fliegen, dass die Flugkurve des Flugzeuges ziemlich genau einer Parabel entspricht, also einer Kurve, entlang der das Flugzeug *ohne* Lufteinfluss fliegen würde (siehe Abb. 20). Deshalb spricht man auch von Parabelflügen.

Hilfe zu A8: Die dir gewohnte Form einer Flamme kommt durch Luft-Konvektion zustande, also durch die aufsteigende warme Luft. Die gelbliche Farbe stammt von verbrennenden Russpartikeln. Im freien Fall ist die Flamme schwerelos, daher gibt es auch keine Konvektion und die Flamme wird rund. Durch den geringeren Sauerstoffnachschub ist die Flamme wesentlich kühler und bläulich.

Hilfe zu A9: Nimm an, ein Photon fliegt quer durch eine Rakete, während diese nach oben beschleunigt (Abb. 6 links und Abb. 21). Aus Sicht eines Beobachters von außen fliegt das Photon schnurgerade. Weil die Rakete aber nach oben beschleunigt, muss die Photonenbahn aus Sicht eines Beobachters innen einer Wurfparabel gleichen (Abb. 22a). Nun wenden wir das Äquivalenzprinzip an. Daraus folgt direkt, dass auch Licht im Gravitationsfeld abgelenkt werden muss (Abb. 22b).

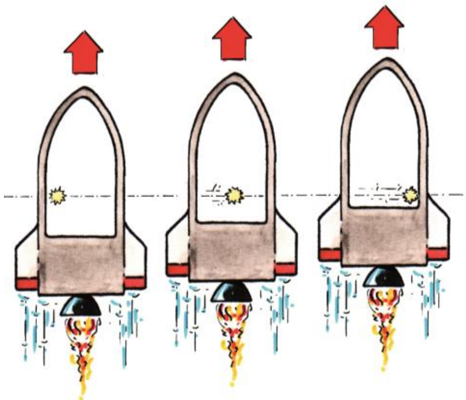

Abb. 21: Vorgang aus der Außensicht. Das Photon bewegt sich entlang einer Geraden (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 43.7, S. 40).

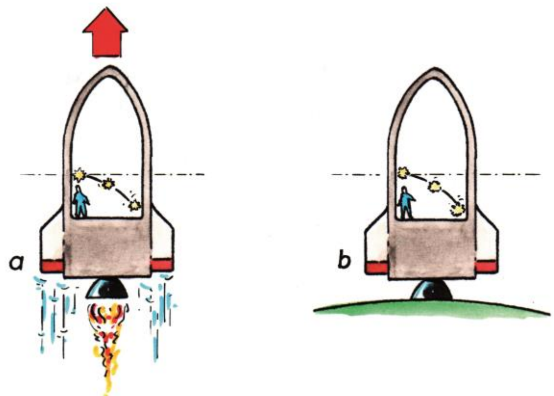

Abb. 22: a) Derselbe Vorgang wie in Abb. 21 aus Sicht eines Beobachters in der Rakete. b) Auf Grund des Äquivalenzprinzips folgt die Ablenkung eines Lichtstrahls im Gravitationsfeld (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 43.8, S. 40).

Hilfe zu A10: Aus Sicht der klassischen Mechanik ruhst du in einem Inertialsystem. Die Gravitationskraft und die Bodenreaktionskraft, die auf deine Füße drückt, heben einander auf. Auf den Apfel wirkt aber im Fall nur die Gravitationskraft, deshalb fällt er zu Boden. Aus Sicht der ART sieht es umgekehrt aus. Hier ist nämlich jenes System das Inertialsystem, in dem die Gravitationskraft verschwindet, und das ist das System, das mit dem Apfel mitfällt. Von diesem System aus gesehen wirken auf den Ball und dich keine Gravitation mehr. Die Bodenreaktionskraft verschwindet aber nicht. Sie beschleunigt dich nach oben. Es ist so, als wärst du in einer Rakete.

Hilfe zu A11: Im Fall a greifen Zentrifugal- und Zentripetalkraft (Gravitation) an jedem einzelnen Atom deines Körpers an und heben einander dort auf. Das macht dich schwerelos. Im Fall b greift die Zentrifugalkraft ebenfalls an jedem Atom deines Körpers an, aber die Zentripetalkraft (Normalkraft) der Raumstation drückt nur auf deine Füße. Dadurch wird dein Körper verformt und das kannst du als Gewicht spüren.

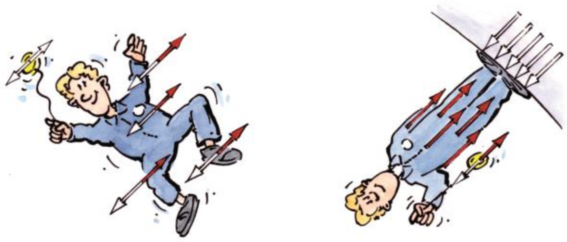

Abb. 23 (Grafik: Janosch Slama)

Hilfe zu A12: Wenn das frei fallende System groß ist (Abb. 8b), dann merkt man, dass die Kugeln mit der Zeit aufeinander zudriften. Man könnte aber zum Beispiel die beiden Kugeln in zwei kleinere Systeme stecken, die jeweils wieder ein Inertialsystem bilden (Abb. 8c). Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt es also keine großräumigen Inertialsysteme, sondern nur lokale Inertialsysteme. Unter einer Gezeitenkraft (siehe Kap. 13.4, BB6) versteht man allgemein, dass die Gravitationskraft an einem Objekt nicht überall gleich groß ist. Sie kommt zu Stande, wenn das Gravitationsfeld nicht homogen ist. Die Feldlinien sind dann nicht parallel, sondern laufen aufeinander zu, wie das eben z. B. beim Gravitationsfeld der Erde ist. Ein lokales Inertialsystem muss so klein sein, dass die Gezeitenkraft praktisch keine Rolle spielt, dass also die Inhomogenität verschwindend klein ist.

Hilfe zu A13: Man könnte die klassische Mechanik ohne Schaden modifizieren, indem man konsequent zwischen träger und schwerer Masse unterscheidet (siehe z. B. Antwort auf A9). Träge und schwere Masse eines Gegenstandes hätten aber dann unterschiedliche Werte, was sich z. B. auf den freien Fall auswirken würde. Die klassische Mechanik wäre aber nach wie vor gültig. Bei der ART ist das anders, weil diese unbedingt voraussetzt, dass träge und schwere Masse nicht zu unterscheiden sind (siehe Abb. 6). Zum Beispiel wäre die Behauptung "In einem Gravitationsfeld frei fallende Bezugssysteme sind Inertialsysteme" nicht mehr richtig, weil das neu gefundene Material nicht mit der gleichen Geschwindigkeit fallen und somit wegdriften würde. Die ART wäre also erledigt.

Hilfe zu A14 a: Wenn du von einem Meteor verfolgt wirst und die Geschwindigkeit erhöhst, dann sinkt seine Relativgeschwindigkeit und mit ihr seine Energie. Wie ist das, wenn du von einem Photon verfolgt wirst? Wenn du Licht als Welle betrachtest, dann muss sich auf Grund des Doppler-Effekts die Frequenz verringern - die Geschwindigkeit des Lichts kann sich aber natürlich nicht verändern! Egal wie stark du beschleunigst, das Photon prallt immer mit *c* auf! Die Frequenz des Photons verschiebt sich aber in Richtung des roten Bereichs des Spektrums, und man spricht daher von Rotverschiebung. Mit der Frequenz verringert sich auch seine Energie. Würde das Raumschiff im Retourgang beschleunigen, dann käme es zu einer Blauverschiebung. Beim relativistischen Doppler-Effekt spielt auch die Zeitdehnung eine Rolle.

Hilfe zu A14 b: Nach dem Äquivalenzprinzip kann zwischen Beschleunigung und Gravitation nicht unterschieden werden. Solange das Raumschiff beschleunigt, ist die Rotverschiebung durch den Doppler-Effekt völlig äquivalent zur Rotverschiebung im Gravitationsfeld. Du musst dir Abb. 9B nur um 90 ° gegen den Uhrzeigersinn gedreht vorstellen und mit Abb. 6 vergleichen.

Hilfe zu A15: Die Energie eines Photons ist $E = h \cdot f$ (h ist das Planck'sche Wirkungsquantum mit $6{,}67 \cdot 10^{-34}$ Js). Die Photonen haben ein Massenäquivalent von $m = E/c^2 = hf/c^2$. Zum Aufsteigen im Gravitationsfeld ist eine Hebearbeit notwendig. Die Energie des Photons verringert sich um diesen Wert. Es gilt also dann $E' = hf' = hf - W_H$.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, eine Gleichung für die Frequenzänderung abzuleiten. Man kann einmal von einem homogenen Erdschwerefeld ausgehen, in dem sich g während des Aufsteigens nicht ändert. Für die Hebearbeit gilt dann $W_H = mgH = \frac{hf}{c^2} gH$. Wenn man oben einsetzt, erhält man $E' = hf' = hf - W_H = hf - \frac{hf}{c^2} gH$. Daraus folgt $f' = f - \frac{f}{c^2} gH = f\left(1 - \frac{gH}{c^2}\right)$.

Die andere Möglichkeit ist, eine Gleichung für den allgemeinen Fall aufzustellen, in dem ein Photon im Gravitationsfeld einer beliebigen Zentralmasse *M* (etwa der Erde oder eines Sterns) aufsteigt. Dann gilt die Gleichung $W_H = mGM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right) = \frac{hf}{c^2} GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$. Wenn man oben einsetzt, erhält man $E' = hf' = hf - W_H = hf - \frac{hf}{c^2} GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$. Daraus folgt $f' = f - \frac{f}{c^2} GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right) = f\left(1 - \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)\right)$. Wenn man annimmt, dass das Photon dem Gravitationsfeld vollkommen entkommt ($r_n = \infty$), vereinfacht sich die Gleichung zu $f' = f\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)$.

Hilfe zu A16: Wenn man annimmt, dass das Schwerefeld der Erde homogen ist (was nicht der Fall ist): Bei *H* = 10 km bekommt der Faktor $\frac{gH}{c^2}$ den Wert $1{,}09 \cdot 10^{-12}$. Die Frequenz von grünem Licht liegt bei etwa $6 \cdot 10^{14}$ Hz. Absolut ergibt das also die Frequenzverschiebung 654 Hz.
Wenn man von einem Gravitationsfeld der Masse $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg ausgeht: Für $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m und $r_n = 6{,}38 \cdot 10^6$ m erhält man für den Faktor $\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$ den Wert $1{,}094 \cdot 10^{-12}$. Absolut ergibt das in diesem Fall eine Frequenzverschiebung von rund 656 Hz. Das Ergebnis ist also praktisch dasselbe, weil in diesem kleinen Bereich das Schwerefeld der Erde nahezu homogen ist (siehe A12). Eine Verschiebung um einige hundert Hertz ist recht viel, aber verglichen mit den 600 Billiarden Hertz von grünem Licht ist das nicht mal ein Tropfen auf den heißen Stein.

Hilfe zu A17: Nimm an, du bist 1,8 m groß, lebst 100 Jahre und stehst davon 66 Jahre (= $2{,}1 \cdot 10^9$ s). Der Faktor gH/c^2 ist dann $1{,}96 \cdot 10^{-16}$. Mit den „Stehsekunden" deines Lebens multipliziert ergibt das dann
$4{,}1 \cdot 10^{-7}$ s. Um diese Zeit altert dein Kopf schneller als die Füße. Wenn zwischen Meer und Alm 2000 m liegen und du rechnest mit 100 Jahren ($3{,}15 \cdot 10^9$ s), dann ist der Unterschied $6{,}88 \cdot 10^{-4}$ s.

Hilfe zu A18: Wenn man ein GPS-Gerät benutzt (siehe A19 und A20).

Hilfe zu A19 a: Für jede Kreisbewegung ist eine Zentripetalkraft F_{ZP} notwendig. Im Falle der Satelliten kommt diese Zentripetalkraft von der Gravitationskraft. Man kann daher gleichsetzen und nach *v* auflösen: Aus $F_G = G\frac{mM}{r^2} = F_{ZP} = \frac{mv^2}{r}$ folgt $G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$ und $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. Dabei ist *r* der Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt, also 6370 km + 20.200 km = 26.570 km = $2{,}657 \cdot 10^7$ m. Wenn du alle anderen Werte aus der Angabe einsetzt, erhältst du für die Geschwindigkeit der Satelliten etwa 3875 km/h.

Hilfe zu A19 b: Weil wir am Faktor interessiert sind, formst du die Gleichung am besten so um: $\frac{t_S}{t_E} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Wenn du für v = 3875 m/s einsetzt und einen genauen Taschenrechner verwendest, erhältst du $\frac{t_S}{t_E} = 0{,}99999999991658 = 1 - 0{,}834 \cdot 10^{-10}$.

Hilfe zu A19 c: Stelle zuerst die Gleichung um: $T_E = T_S\left(1 - \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_S}\right)\right) \to \frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{\left(1 - \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_S}\right)\right)}$. r_s ist der Abstand der Satelliten vom Erdmittelpunkt, also 6370 km + 20.200 km = 26.570 km = $2{,}657 \cdot 10^7$ m. Wenn du alle bekannten Werte einsetzt, erhältst du $\frac{T_S}{T_E} = 1{,}000000000529 = 1 + 5{,}29 \cdot 10^{-10}$.

Hilfe zu A19 d: In Summe ergibt sich $\frac{T_S}{T_E} = 1 - 0{,}834 \cdot 10^{-10} + 5{,}29 \cdot 10^{-10} = 1 + 4{,}46 \cdot 10^{-10}$.
Der Effekt der ART überwiegt bei weitem. Nun sind die Techniker auf einen genial einfachen Trick gekommen: Die Satellitenuhren werden von vornherein so eingestellt, dass sie auf der Erde um den oben errechneten Faktor zu langsam gehen. Von der Erde aus gesehen haben sie dann im Orbit exakt die richtige Frequenz.

Hilfe zu A20: Wenn keine Korrekturen durchgeführt werden, beträgt der Fehler pro Sekunde $4{,}46 \cdot 10^{-10}$ s. Es gilt *c* = *s*/*t* und daher *s* = *c*·*t*. Der räumliche Fehler schlägt sich also pro Sekunde mit $3 \cdot 10^8$ m/s·$4{,}46 \cdot 10^{-10}$ s ≈ 0,13 m zu Buch. In einer Stunde wären das immerhin 0,13 m·3600 = 468 m, und du würdest vielleicht in einem Gestrüpp landen oder in einer Sackgasse!

Hilfe zu A21: Wäre die Erde flach, hätte der Weg diese Form: ⊔. Auf einer Kugeloberfläche gibt es aber einen Ausgangsort, zu dem man auf diesem Spaziergang wieder zurückkehrt, nämlich den Nordpol. Dann geht man beim Weg nach Westen im Abstand von 1 km um den Pol herum, und der Weg sieht deshalb aus: ◁. Der Bär ist daher ein Eisbär und somit weiß.

Hilfe zu A22: Um zu fallen, muss sich ein Lichtstrahl nach unten neigen, und dazu muss sich seine Unterseite langsamer bewegen als die Oberseite. Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird dadurch aber nicht verletzt, denn es ist die Zeit selbst, die langsamer vergeht. Dadurch messen die Personen lokal für die Lichtgeschwindigkeit immer *c*, aber von außerhalb sieht es so aus, als würde sich das Licht langsamer bewegen. Deshalb kann man auch argumentieren: Nicht die Schwerkraft lenkt den Lichtstrahl ab, sondern die Verlangsamung der Uhren. Natürlich kommt es letztlich aufs selbe raus.

Hilfe zu A23 a: Es gilt $F_G = G\frac{mM}{r^2}$ und $F = ma$. Um die Beschleunigung auf eine Masse im Schwerefeld zu berechnen, musst du daher die Gleichungen gleichsetzen $F_G = G\frac{mM}{r^2} = ma$ und erhältst $a = \frac{GM}{r^2}$. Weil der Radius der Sonne mit *R* angegeben ist, gilt $a = \frac{GM}{R^2}$.

Hilfe zu A23 b: Am Rand der Sonne gilt $y = -\frac{a}{2}t^2$ und $a = \frac{GM}{R^2}$ und somit $y = -\frac{GM}{2R^2}t^2$. Weiters gilt $t = x/c$ und somit $y(x) = -\frac{GM}{2R^2c^2}x^2$.

Hilfe zu A23 c: $y(x)' = -\frac{GM}{2R^2c^2}2x = -\frac{GM}{R^2c^2}x$. Daraus folgt $y(2R)' = -\frac{GM}{R^2c^2}2R = -\frac{2GM}{Rc^2} = k$.

Hilfe zu A23 d: $k = \tan\alpha \approx \alpha = -\frac{2GM}{Rc^2}$. Unter Berücksichtigung des Faktors 2 erhält man $|\alpha| = \frac{4GM}{Rc^2}$. Wenn du die bekannten Werte einsetzt, erhältst du für den Winkel der Ablenkung $\alpha = 8{,}47 \cdot 10^{-6}$ rad. Es gilt 1 rad = 57,296°. Der Winkel der Ablenkung beträgt daher
$8{,}47 \cdot 10^{-6} \cdot 57{,}296° = 0{,}000485° = 0{,}000485 \cdot 3600'' = 1{,}75''$.

Hilfe zu A24: Der amerikanische Physiker Irwin Shapiro hatte 1965 eine sehr gute Idee, die von der Sonne verursachte Raumkrümmung zu messen. Er ließ einen Radarstrahl an der Venus reflektieren und bestimmte so ihren Abstand (Abb. 24). Je näher sich die Venus von der Erde aus gesehen bei der Sonne befindet, desto größer muss der zusätzlich zurückgelegte Weg sein (Abb. 24b). Und genau das konnte man im Experiment belegen.
In Abb. 12 siehst du, dass die maximale Verzögerung des Signals 240 µs betrug. Diese Verzögerung hat zwei Ursachen. 50 % des Effekts kommen dadurch zu Stande, dass in der Nähe der Sonne die Uhren langsamer gehen. Die anderen 50 % sind auf die Raumkrümmung zurückzuführen. Der Umweg durch die Raumbeule verursacht also in Summe 120 µs bzw. 60 µs pro Strecke. Die Raumbeule verursacht daher eine zusätzliche Laufstrecke von $s = c \cdot t =$
$3 \cdot 10^8$ m/s$\cdot 60 \cdot 10^{-6}$ s = $180 \cdot 10^2$ m = 18 km.

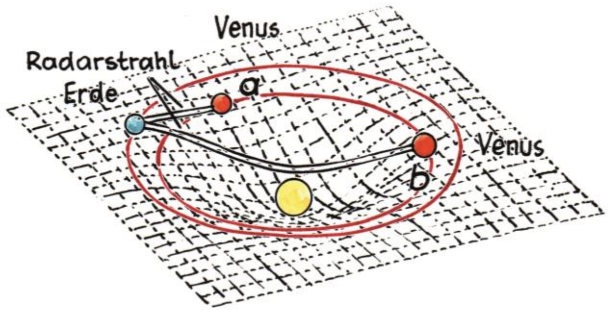

Abb. 24: Je näher die Venus von der Erde aus gesehen bei der Sonne steht, desto stärker macht sich die Raumkrümmung und somit die Signalverzögerung bemerkbar (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 43.25, S. 46).

Hilfe zu A25: Die Lichtablenkung am Rande der Sonne ist minimal (siehe A23). Bei extrem massenreichen Objekten wie Neutronensternen oder schwarzen Löchern kann sie aber sehr beachtlich werden. Der Gravitationslinseneffekt führt generell dazu, dass das hintere Objekt quasi nach außen geschoben wird (siehe Abb. 14). In Fall der Abb. 13 entsteht dadurch ein Doppelbild des hinteren Sterns. Würde er symmetrisch hinter dem Neutronenstern liegen, entstünde ein Einstein-Ring.

Hilfe zu A26: Unter Fluchtgeschwindigkeit versteht man, dass die Anfangsgeschwindigkeit eines Objekts so groß ist, dass es der Anziehung einer Zentralmasse entkommen kann. "Entkommen können" bedeutet, dass das Objekt unendlich weit fliegen kann. Dann gilt $r_n = \infty$, und die Gleichung für die potenzielle Energie lautet somit $E_p = mGM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{mGM}{r}$. Wir suchen die kleinstmögliche Geschwindigkeit. In diesem Fall kommt das Objekt im Unendlichen zum Stillstand. Die kinetische Energie zu Beginn ist dann komplett in potenzielle Energie umgewandelt. Daher kann man beide Gleichungen gleichsetzen und nach *v* auslösen. Man erhält $E_p = \frac{mGM}{r} = E_k = \frac{mv^2}{2} \to v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$.

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 8 | ISBN: 978-3-209-04868-4

Hilfe zu A27: Es gilt $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Der Schwarzschildradius ist erreicht, wenn $v = c$ gilt. Daher kann man schreiben: $c = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}} \rightarrow R_S = \frac{2GM}{c^2}$. Exakt dieses Ergebnis bekommt man auch unter Verwendung der ART. Dass bei unserer Berechnung dasselbe herauskommt, ist allerdings Zufall, weil wir ja die Gleichungen für E_p und E_k aus der Newton'schen Mechanik verwenden. Kein Zufall ist jedoch die Struktur der Formel: $R_S \sim \frac{G}{c^2} M$. In einer relativistischen Theorie der Gravitation müssen ja sowohl die Gravitationskonstante G als auch die Lichtgeschwindigkeit c eine Rolle spielen. Die ART stellt eine Beziehung zwischen Masse (Energie) und Länge (Raum-Zeitkrümmung) her. Eine Umrechnung von Masse in Länge liefert nur der Faktor $\frac{G}{c^2}$, denn es gilt $[R_S] = \mathrm{m} = \left[\frac{G}{c^2} M\right] = \frac{\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s}^2}}{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} \mathrm{kg} = \frac{\mathrm{m}^3 \mathrm{s}^2 \mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2 \mathrm{kg \cdot s}^2} = \mathrm{m}.$

Hilfe zu A28 a: Das Volumen einer Kugel ist $V = \frac{4r^3\pi}{3}$. Wenn du für *r* den Schwarzschildradius $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ einsetzt, erhältst du $V = \frac{4\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3 \pi}{3} = \frac{32G^3M^3\pi}{3c^6}$. Die kritische Dichte ist daher $\rho_C = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{32G^3M^3\pi}{3c^6}} = \frac{3c^6}{32G^3M^2\pi}$. Sobald eine kugelförmige Masse diese Dichte überschreitet, muss sie zu einem schwarzen Loch kollabieren.

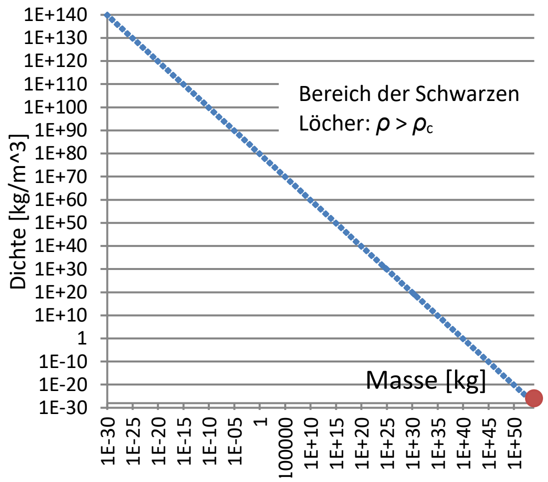

Abb. 25 zu A28 b (Grafik: Martin Apolin)

Hilfe zu A28 b: Je größer die Masse eines schwarzen Lochs, desto kleiner kann seine Dichte sein. Die kritische Dichte kann dabei absurd winzig werden. Interessant ist, dass das sichtbare Universum eine Dichte hat, die über der kritischen Dichte für ein schwarzes Loch liegt (Abb. 25). Ist das Universum ein Schwarzes Loch? Das kann man so nicht sagen. Ein Schwarzes Loch braucht einen "Außenraum", damit der Begriff Ereignishorizont überhaupt einen Sinn hat. Das trifft aber auf das Universum nicht zu. Wahrscheinlich ist es so, dass es sich hier eher um einen Zufall handelt.

Hilfe zu A29: Es gilt $F_G = G\frac{mM}{r^2} \sim \frac{M}{r^2}$. Wenn die Sonne plötzlich ein Schwarzes Loch wäre, wäre es natürlich 8 Minuten später auf der Erde stockdunkel, aber auf die Gravitation hätte es keinen Einfluss, weil sich ja die Masse nicht ändert. Stellare Schwarze Löcher gibt es schon ab etwa 4 Sonnenmassen. Das ist nicht überwältigend viel, wenn man bedenkt, dass große Sterne weit über 100 Sonnenmassen haben können. Die verheerende Wirkung von Schwarzen Löchern kommt also nicht durch die Masse zu Stande, sondern durch den kleinen Radius! Dadurch kann man sich dem Massenzentrum viel stärker nähern, wodurch Gravitations- und Gezeitenkräfte (siehe A30 und 31) extrem anwachsen.

Hilfe zu A30 a: Unter Gezeitenkraft versteht man ganz allgemein, dass die Gravitationskraft an einem Objekt nicht überall gleich groß ist. Dadurch kann das Objekt verformt werden. Das ist etwa bei den Wassermassen auf der Erde der Fall, die durch die Gezeitenkräfte von Mond und Sonne zu Ebbe und Flut verformt werden. Im Extremfall kann das Objekt zerreißen oder zerbrechen. Die Saturnringe bestehen z. B. aus Milliarden von Brocken, die wahrscheinlich die Überreste eines Mondes sind, der durch die Gezeitenkraft zerrissen wurde.
In Abb. 16 siehst du die Gezeitenkraft zwischen Kopf und Füßen eines Astronauten in der Nähe eines Schwarzen Lochs. Bei a ist der Unterschied der Anziehungskräfte noch so gering, dass man ihn nur schwer einzeichnen kann. Bei b kannst du ihn schon sehr stark sehen. Wäre der Astronaut nur halb so groß (blaue Linie), dann wäre die Gezeitenkraft an dieser Stelle wesentlich geringer.

Hilfe zu A30 b: Die Gravitationsbeschleunigung im Feld einer Masse folgt aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz (Angabe zu A5): $a = \frac{GM}{r^2}$. Nimm nun an, dass eine kleine Masse auf eine große fällt, etwa ein Astronaut in ein schwarzes Loch. Er soll mit den Füßen auf das schwarze Loch zufallen. Auf die Füße wirkt daher die Gravitationskraft stärker als auf den Kopf. Nimm an, die Größe des Astronauten ist Δr. Der Unterschied in der Beschleunigung von Kopf und Füßen entspricht dann der Gezeitenbeschleunigung. $\Delta a = a_{gez} = \frac{GM}{(r-\Delta r)^2} - \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{1}{\frac{(r-\Delta r)^2}{r^2}} - 1\right) = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{1}{\left(\frac{r-\Delta r}{r}\right)^2} - 1\right) = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} - 1\right)$. Wenn du die Reihenentwicklung anwendest und nach dem zweiten Glied abbrichst, erhältst du $\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} \approx 1 + 2\Delta r/r$). Wenn du oben einsetzt, bekommst du $a_{gez} = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} - 1\right) \approx \frac{GM}{r^2}(1 + 2\Delta r/r - 1) = 2\Delta r \frac{GM}{r^3}$.

Hilfe zu A31 a: Wenn du die bekannten Daten in die Formel für den Schwarzschildradius einsetzt, so erhältst du für das kleine Schwarze Loch einen Radius von etwa 30 km, für das große einen Radius von etwa 1/12 des Abstands Erde-Sonne (Tab. 1).

	Schwarzes Loch 10 Sonnenmassen	Schwarzes Loch $4{,}3\cdot10^6$ Sonnenmassen
absolute Masse	$2\cdot10^{31}$ kg	$8{,}6\cdot10^{36}$ kg
Schwarz-schildradius (R_s)	$2{,}96\cdot10^4$ m ≈ 30 km	$1{,}27\cdot10^{10}$ m ≈ 1/12 des Abstands Erde-Sonne
kritischer Abstand (r_{krit})	$3{,}63\cdot10^6$ m ≈ 3600 km	$2{,}74\cdot10^8$ m ≈ 1/550 des Abstands Erde-Sonne
	$r_{krit} > R_s$	$r_{krit} < R_s$

Tab. 1: Berechnete Daten zu A31 a und c

Hilfe zu A31 b: Eine Gezeitenbeschleunigung von 100 m/s² oder 10 *g* würde bedeuten, dass Kopf und Füße mit dem 10-fachen des Körpergewichts auseinander gezogen werden. Salopp gesagt wäre das so, als würde man dich auf der Erde am Kopf aufhängen und noch 10 Personen mit deinem Körpergewicht an deine Füße hängen. Es ist sehr unwahrscheinlich, dass das ein Mensch aushält. Wir sind aber großzügig und schätzen die obere noch tolerierbare Gezeitenbeschleunigung mit 10 *g* ab - wahrscheinlich liegt sie um einiges niedriger!

Hilfe zu A31 c: Die Gezeitenbeschleunigung ist $a_{gez} \approx 2\Delta r \frac{GM}{r^3}$. Daraus folgt $r_{krit} = \sqrt[3]{\frac{2\Delta r GM}{a_{gez}}} = \sqrt[3]{\frac{2\Delta r GM}{10\,g}}$. Nehmen wir an, der Astronaut ist 1,8 m groß (Δr). Weil wir die maximal tolerierbare Gezeitenbeschleunigung mit 10 *g* ≈ 100 m/s² angenommen haben, ergeben sich für die kritischen Entfernungen rund $3{,}6\cdot10^6$ m und $2{,}7\cdot10^8$ m (siehe Tab. 1).

Hilfe zu A31 d: Beim kleinen Schwarzen Loch würde der Astronaut schon in sehr großer Entfernung spaghettisiert werden (Abb. 26; Tab. 1). Beim großen Schwarzen Loch liegt aber der kritische Abstand innerhalb des Schwarzschildradius – hier könnte der Flug durch das Schwarze Loch theoretisch gelingen.

Abb. 26: Beim kleinen Schwarzen Loch würde der Astronaut spaghettifiziert werden, bevor er durch den Schwarzschildradius fällt (Grafik: Janosch Slama).

Hilfe zu A31 e: Rechnen wir zunächst ganz allgemein. Die Gezeitenbeschleunigung ist $a_{gez} \approx 2\Delta r \frac{GM}{r^3}$. Wir wollen die Beschleunigung am Schwarzschildradius wissen, und müssen diesen daher für *r* einsetzen. $a_{gez} \approx 2\Delta r \frac{GM}{r^3} = 2\Delta r \frac{GM}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3} = 2\Delta r \frac{GM}{\frac{8G^3M^3}{c^6}} = 2\Delta r \frac{GMc^6}{8G^3M^3} = \frac{\Delta r c^6}{4G^2M^2}$. Dann können wir nach M umformen: $M = \sqrt[2]{\frac{\Delta r c^6}{4G^2 a_{gez}}} = \frac{c^3}{2G}\sqrt{\frac{\Delta r}{a_{gez}}}$. Wenn wir für Δr unsere 1,8 m einsetzen und für a_{gez} 100 m/s², dann vereinfacht sich die Gleichung zu $M = \frac{c^3}{2G} \cdot 0{,}134\ \mathrm{s}^1$. Die kritische Masse hängt dann also nur von zwei Naturkonstanten ab und beträgt $2{,}7\cdot10^{34}$ kg oder rund 14.000 Sonnenmassen. Erst wenn ein Schwarzes Loch diese Masse übersteigt, könnte zumindest theoretisch dem Astronauten ein unbeschadeter Flug durch ein Wurmloch gelingen.

Hilfe zu A32: Von außen gesehen bleibt der Astronaut am Schwarzschildradius hängen. Auf Grund der enormen Rotverschiebung ist er dann aber nicht mehr zu sehen. Für den fallenden Astronauten hat der Schwarzschild-Radius keine besondere Bedeutung, wenn er nicht vorher spaghettisiert wird (siehe A31 d). Wenn das Schwarze Loch sehr massereich ist, würde der Astronaut aufprallen - oder vielleicht durch ein Wurmloch fliegen.