LÖSUNG ZU 136:

$f(x) = a \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{5}{4} \cdot x + 4$

a) 1)

Da F_1 eine Stammfunktion von f ist, bilden wir zunächst das unbestimmte Integral von f:

$$\int a \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{5}{4} \cdot x + 4 \, \mathrm{d}x = \frac{a}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{5}{8} \cdot x^2 + 4 \cdot x + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Mithilfe von $F_1(1) = \frac{109}{24}$ können wir den Wert von c bestimmen:

$\frac{109}{24} = \frac{a}{4} - \frac{1}{12} + \frac{5}{8} + 4 + c$

Damit erhalten wir $c = -\frac{a}{4}$.

Es gilt also: $\boldsymbol{F_1(x) = \frac{a}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{5}{8} \cdot x^2 + 4 \cdot x - \frac{a}{4}}$.

2)

Die Funktion f hat ausschließlich positive Funktionswerte. Dadurch entspricht das bestimmte Integral $\int_0^{12} f(x)\,\mathrm{d}x$ dem Flächeninhalt der Wandfläche. Da F_2 eine Stammfunktion von f ist, können wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden:

$$\int_0^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{F_2(12) - F_2(0)}$$

b) 1)

Die Funktion f hat ausschließlich positive Funktionswerte. Dadurch entspricht das bestimmte Integral $\int_0^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ dem Flächeninhalt der Wandfläche bis zur Geraden $x = c$.

Wir setzen den gegebenen Wert für a in die Funktionsgleichung ein und müssen folgende Gleichung lösen:

$$\int_0^{c} \frac{3}{230} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{5}{4} \cdot x + 4 \, \mathrm{d}x = 20$$

Mit Technologie erhalten wir die reellen Lösungen $-5{,}952$ … und $3{,}743$ …

Es gilt also: $\boldsymbol{c = 3{,}743}$ …

2)

Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt der gesamten Wandfläche mithilfe von Technologie :

$$\int_0^{12} \frac{3}{230} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{5}{4} \cdot x + 4 \, \mathrm{d}x = 61{,}617 \ldots$$

Wir wissen, dass 20 m^2 davon blau gefärbt sind.

$$\frac{20}{61{,}617 \ldots} = 0{,}324 \ldots$$

Es sind also **rund 32 Prozent** der gesamten Wandfläche blau gefärbt.