

Formelsammlung

Diese Formelsammlung ist auch im Lehrwerk-Online  zum Download gratis verfügbar.
yt46bm

I1 Zahlen und Maße

Runden von Zahlen

Bei 0, 1, 2, 3, 4 als nachfolgende Ziffer wird abgerundet; bei 5, 6, 7, 8, 9 aufgerundet.

Betrag einer Zahl

Eine Zahl a und ihre Gegenzahl haben denselben Betrag: $|+a| = |-a| \geq 0$.

Teiler und Vielfache

Eine natürliche Zahl t ist ein Teiler einer natürlichen Zahl a , wenn sich a durch t ohne Rest teilen lässt. a ist somit gleichzeitig ein Vielfaches der Zahl t . $t | a \Leftrightarrow a = t \cdot n$.

Eine Zahl, die nur durch sich selbst und 1 teilbar ist, nennt man Primzahl.

Rechenregeln

Additionen (+) und Subtraktionen (−) werden Rechnungsarten erster Stufe genannt.

Sie werden auch als „Strichrechnungen“ bezeichnet.

Multiplikationen (·) und Divisionen (:) werden Rechnungsarten zweiter Stufe genannt. Sie werden auch als „Punktrechnungen“ bezeichnet.

Die Rechnungsarten zweiter Stufe haben Vorrang vor den Rechnungsarten erster Stufe.

Kurzsprechweise: „Punktrechnung vor Strichrechnung“.

Die Klammerregel gilt jedoch vor der Vorrangregel: Was in Klammern steht, ist zuerst zu berechnen.

Vorzeichenregeln

Addition und Subtraktion:

$$a + (+b) = a + b$$

$$a + (-b) = a - b$$

$$a - (+b) = a - b$$

$$a - (-b) = a + b$$

$$(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+)$$

Multiplikation:

$$(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$$

$$(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

$$(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$$

$$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$$

$$(a, b \in \mathbb{R}^+)$$

Division:

$$(+a) : (+b) = +(a : b)$$

$$(+a) : (-b) = -(a : b)$$

$$(-a) : (+b) = -(a : b)$$

$$(-a) : (-b) = +(a : b)$$

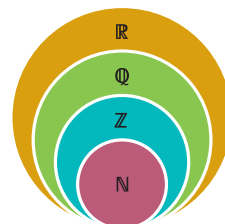
$$(a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 0)$$

Brüche und Rechnen mit Bruchzahlen

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad-bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \end{aligned} \right\} b, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad (b, c, d \neq 0)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (b, c, d \neq 0)$$



Wurzeln

Quadratwurzelziehen

(Umkehrung des Quadrierens)

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \quad (a, x \geq 0)$$

Rechenregeln für Wurzeln

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (a, b \geq 0)$$

Beachte:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a - b} \quad (a > b > 0)$$

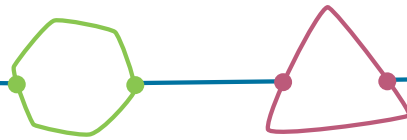
Kubikwurzelziehen

(Umkehrung des Kubierens)

$$x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a} \quad (a, x \geq 0)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b} \quad (a, b > 0)$$



Prozentrechnung und Zinsenrechnung

$$1 \text{ Prozent (1\%)} = \frac{1}{100} = 0,01 \quad W = G \cdot \frac{p}{100}$$

$$W \dots \text{Prozentwert} \quad G \dots \text{Grundwert} \quad \frac{p}{100} = p\% \dots \text{Prozentsatz}$$

$p\%$... vereinbarter Zinssatz p.a. K_0 ... Anfangskapital Z ... Zinsen

Nettozinssatz bei 25% KEST.: $p_{\text{netto}}\% = p\% \cdot 0,75$

$$\text{Zinsen für 1 Jahr: } Z_{\text{netto}} = K_0 \cdot \frac{p_{\text{netto}}}{100} = Z \cdot 0,75$$

$$\text{Guthabenstand nach 1 Jahr: } K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_{\text{netto}}}{100}\right)$$

$$\text{Zinsen für } m \text{ Monate: } Z_{\text{netto}} = K_0 \cdot \frac{p_{\text{netto}}}{100} \cdot \frac{m}{12}$$

$$\text{Zinsen für } t \text{ Tage: } Z_{\text{netto}} = K_0 \cdot \frac{p_{\text{netto}}}{100} \cdot \frac{t}{360}$$

Tatsächliches Guthaben nach n Jahren: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_{\text{netto}}}{100}\right)^n$, $\left(1 + \frac{p_{\text{netto}}}{100}\right)$ heißt Aufzinsungsfaktor

Potenzen und Rechnen mit Potenzen

a^n ... Potenz, a ... Grundzahl (Basis), n ... Hochzahl (Exponent)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{Z}^+)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m, n \in \mathbb{Z}^+, a \neq 0, m > n)$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (m, n \in \mathbb{Z}^+)$$

12 Variable und funktionale Abhängigkeiten

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen

Äquivalente Gleichungen haben die gleiche Lösung.

Die Lösung einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man auf beiden Seiten

- 1) dieselbe Zahl addiert, 2) dieselbe Zahl subtrahiert, 3) mit derselben Zahl ($\neq 0$) multipliziert,
- 4) durch dieselbe Zahl ($\neq 0$) dividiert oder 5) ein Vielfaches der Unbekannten addiert/subtrahiert.

Ungleichungen werden wie Gleichungen mit Hilfe von Äquivalenzumformungen umgeformt.

Beim Multiplizieren mit bzw. Dividieren durch negative Zahlen wird das Ungleichheitszeichen

„umgedreht“. Die Lösungsmenge bei Ungleichungen gibt man entweder in der Mengenschreibweise oder in der Intervallschreibweise an oder man markiert sie auf einer Zahlengeraden.

Lösen von einer Gleichung mit zwei Variablen

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen x und y ($x, y \in \mathbb{R}$) hat die Form:

$$ax + by = c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \text{ und } b \neq 0)$$

Eine solche Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen.

Lösungen sind jene geordneten Zahlenpaare $(x|y)$, die die Gleichung erfüllen.

Die graphische Darstellung der Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen ergibt eine Gerade.

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

In einem System zweier linearer Gleichungen mit zwei Variablen kann die Lösung

- 1) aus genau einem Zahlenpaar („Unbekannte“), 2) aus keinem Zahlenpaar, 3) aus unendlich vielen Zahlenpaaren bestehen.

Mögliche Lösungsverfahren für Systeme zweier linearer Gleichungen mit zwei Variablen:

- 1) Graphisches Verfahren, 2) Einsetzungsverfahren, 3) Gleichsetzungsverfahren,
- 4) Additions- bzw. Subtraktionsverfahren (Eliminationsverfahren)

(Direkte) Proportionalität

Eine Größe y heißt (direkt) proportional zu einer Größe x , wenn gilt: $y = k \cdot x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k$

Der Quotient (direkt) proportionaler Größen ist konstant. k ist eine konstante Zahl bzw. Größe und heißt Proportionalitätsfaktor.

Indirekte Proportionalität

Eine Größe y heißt indirekt proportional zu einer Größe x , wenn gilt: $y = \frac{k}{x} \Leftrightarrow x \cdot y = k$

Das Produkt indirekt proportionaler Größen ist konstant.

Funktionen

Wenn bei einer Zuordnung jedem Wert der Variable x eindeutig ein bestimmter Wert der Variable y zugeordnet ist, spricht man von einer Funktion. Funktionen können dargestellt bzw. beschrieben werden durch

- 1) ein Pfeildiagramm,
- 2) eine (Zuordnungs-)Tabelle,
- 3) ein Diagramm bzw. einen Funktionsgraphen (Graph der Funktion),
- 4) eine Zuordnungsvorschrift (Funktionsgleichung, Funktionsterm).

$y = f(x)$ heißt Funktionsgleichung, wobei $f(x)$ der Funktionsterm, x die unabhängige Variable und y die abhängige Variable ist. Dabei können auch andere Buchstaben als x und y verwendet werden.

Lineare Funktionen

Der Graph einer Funktion mit der Funktionsgleichung $y = k \cdot x + d$ ($k, d \in \mathbb{R}$) ist stets eine Gerade. Funktionen dieses Typs heißen lineare Funktionen.

Unterscheiden sich die x -Werte einer linearen Funktion um 1, so unterscheiden sich die zugehörigen Funktionswerte um k (Steigung).

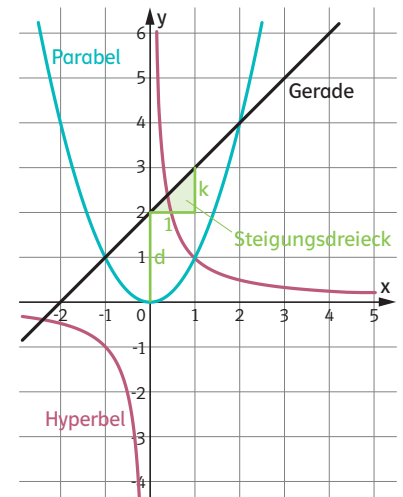
Im Fall von $d = 0$ spricht man von (direkt) proportionalen Funktionen. Ihr Graph geht durch den Ursprung.

Quadratische Funktionen

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) ist eine quadratische Funktion. Der Graph einer Funktion dieses Typs heißt Parabel.

Rationale Funktionen

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{a}{x}$ ($a, x \neq 0$) ist eine rationale Funktion. Der Graph einer Funktion dieses Typs heißt Hyperbel.



I4 Statistische Darstellungen und Kenngrößen

Daten und Häufigkeiten

Datenliste: $x_1, x_2, \dots, x_n$; mit n wird die Gesamtanzahl der Daten einer Liste bezeichnet.

absolute Häufigkeit h : Anzahl der Daten mit einer bestimmten Merkmalsausprägung

relative Häufigkeit: $r = \frac{h}{n}$ prozentuale Häufigkeit: $r \cdot 100\%$

Spannweite

Die Differenz zwischen dem größten Wert (= Maximum) und dem kleinsten Wert (= Minimum) einer Zahlenreihe nennt man Spannweite.

Mittelwerte

arithmetischer Mittelwert: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

gewichtetes arithmetisches Mittel = $\frac{\text{Summe aller Produkte „Gewicht mal Wert“}}{\text{Summe der Gewichte}}$

Mittelwert von Mittelwerten: $\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \cdot n_1 + \bar{x}_2 \cdot n_2 + \dots + \bar{x}_j \cdot n_j}{n_1 + n_2 + \dots + n_j}$ ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j$ Mittelwerte zu $n_1, n_2, \dots, n_j$ Einzelwerten)

Modus/Modalwert: häufigster Wert einer Datenliste

Median/Zentralwert: der Wert, der in der Mitte einer geordneten Datenliste steht

Varianz, Standardabweichung und Quartile

Die Varianz ist die durchschnittliche quadrierte Abweichung der Daten vom arithmetischen Mittel.

Die Quadratwurzel aus der Varianz heißt Standardabweichung.

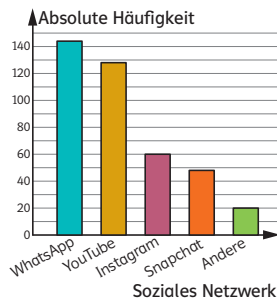
Standardabweichung: $s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$

Das 1. Quartil (q_1) ist die 25%-Grenze der geordneten Datenreihe. Das 2. Quartil entspricht dem Median.

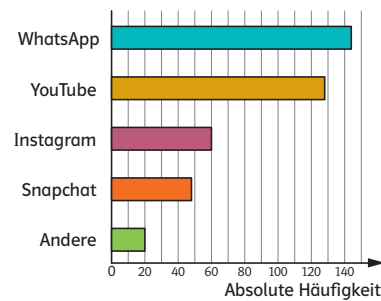
Das 3. Quartil (q_3) ist die 75%-Grenze der geordneten Datenreihe.

Statistische Darstellungen

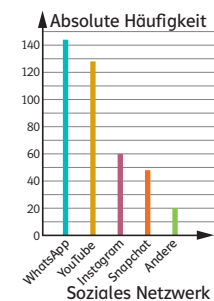
Säulendiagramm:



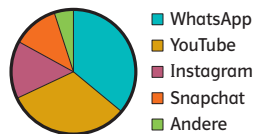
Balkendiagramm:



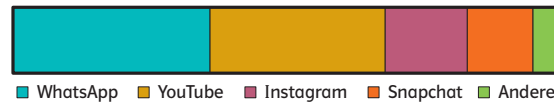
Streifendiagramm:



Kreisdiagramm:



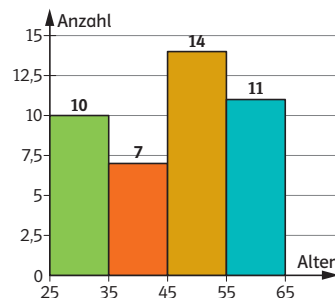
Prozentstreifen:



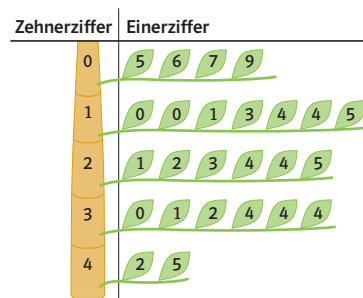
Piktogramm:



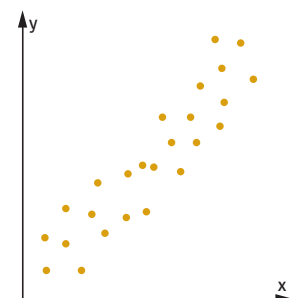
Histogramm:



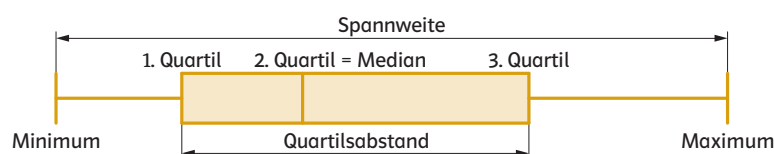
Stängel-Blatt-Diagramm:



Punktwolkendiagramm:



Boxplot:



Klasseneinteilung

Eine Klasseneinteilung verwendet man dann, wenn die Anzahl der Originaldaten sehr groß ist und sehr viele verschiedene Werte vorliegen.

Es müssen alle Werte eindeutig in eine der Klassen eingeteilt werden können.

Faustregel: Bilde zwischen 3 und 10 Klassen, wobei möglichst keine Klasse leer sein soll!

Die Klassen sind idealerweise gleich breit.

Kontingenztafel (Kreuztabelle)

In der Kontingenztafel (Kreuztabelle) werden Häufigkeiten nach zwei Merkmalen gleichzeitig ausgezählt. Es können die relativen oder absoluten Häufigkeiten angegeben sein.

13 Geometrische Figuren und Körper

Ähnlichkeit

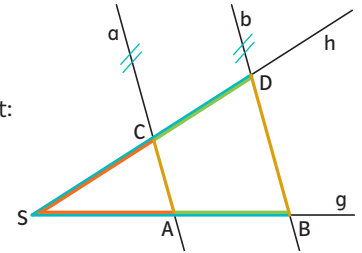
Zwei Figuren (Dreiecke, Vierecke, Vielecke ...) heißen ähnlich, wenn gilt:

1) Entsprechende Längen stehen im gleichen Verhältnis.

2) Entsprechende Winkel sind gleich groß.

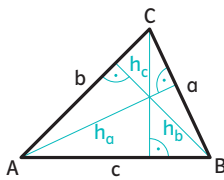
Strahlensatz $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{SC} : \overline{SD}$ bzw. $\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}$

$\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{AC} : \overline{BD}$ bzw. $\overline{SB} : \overline{BD} = \overline{SA} : \overline{AC}$



Dreiecke

Allgemeines Dreieck



$$u = a + b + c$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$\text{Inkreisradius: } r = \frac{2A}{u}$$

Gleichseitiges Dreieck

$$(a = b = c)$$

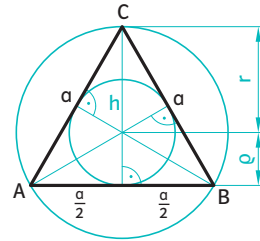
$$u = 3a$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a$$

$$r = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$$



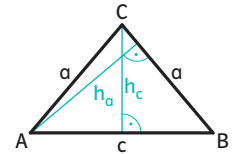
Gleichschenkliges Dreieck

$$(a = b)$$

$$u = 2a + c$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$



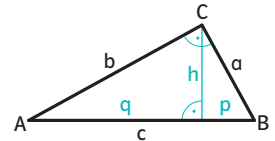
Rechtwinkliges Dreieck

$$(\gamma = 90^\circ)$$

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$r = \frac{a \cdot b}{u}$$

$$r = \frac{c}{2}$$

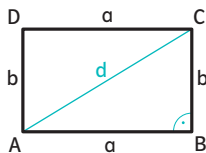


Pythagoreischer Lehrsatz: $c^2 = a^2 + b^2$

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Vier- und Vielecke

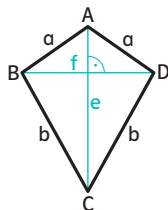


Rechteck

$$A = a \cdot b$$

$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

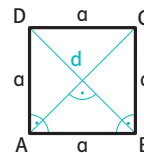
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Drachen (Deltoid)

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



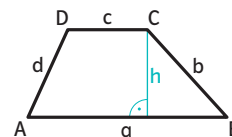
Quadrat

$$A = a \cdot a = a^2 \text{ oder}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot d \cdot d = \frac{1}{2} \cdot d^2$$

$$u = 4 \cdot a$$

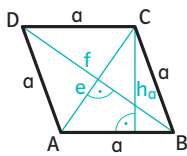
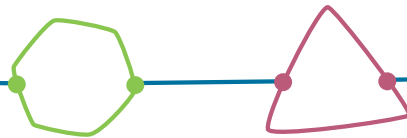
$$d = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2} \cdot a$$



Trapez

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

$$u = a + b + c + d$$

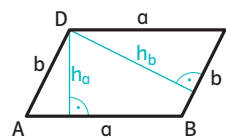


Raute (Rhombus)

$$A = a \cdot h_a \text{ oder}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$u = 4 \cdot a$$



Parallelogramm

$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

Den Flächeninhalt allgemeiner Vierecke und Vielecke ermittelt man durch Zerlegen in Teilfiguren, zB in Dreiecke oder durch Umschreiben von Rechtecken und Abziehen passender Flächeninhalte.

Kreis – Kreisteile

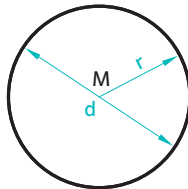
Kreis

$$u = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$$

$$\pi = 3,14159 \dots$$

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

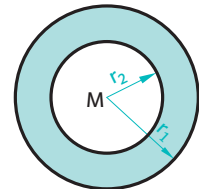


Kreisring

$$u = u_1 + u_2 = 2\pi \cdot r_1 + 2\pi \cdot r_2$$

$$A = A_1 - A_2 = \pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2$$

$$r_1 > r_2$$



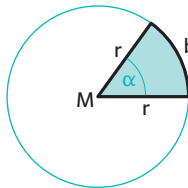
Kreis Sektor (Kreisausschnitt)

$$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180} \quad (\alpha \text{ in Grad})$$

$$u = 2r + b$$

$$A = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360} \quad (\alpha \text{ in Grad})$$



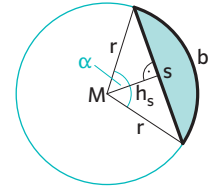
Kreissegment (Kreisabschnitt)

$$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180} \quad (\alpha \text{ in Grad})$$

$$u = b + s$$

$$A = A_{\text{Sektor}} - A_{\text{Dreieck}}$$

$$A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot h_s}{2}$$



Prisma und Pyramide

Quader

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

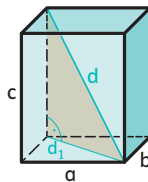
$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

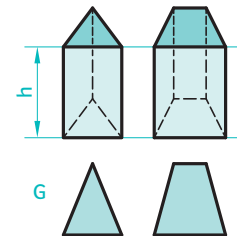


Prisma

$$O = 2 \cdot G + M$$

$$M = u_G \cdot h$$

$$V = G \cdot h$$



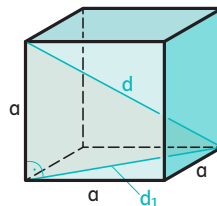
Würfel

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$d = \sqrt{3} \cdot a$$

$$d_1 = \sqrt{2} \cdot a$$



Regelmäßige vierseitige Pyramide

$$G = a^2$$

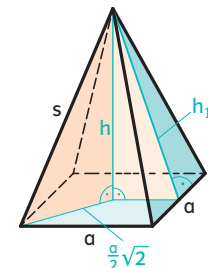
$$M = 2a \cdot h_1$$

$$O = a^2 + 2a \cdot h_1$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$h_1^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

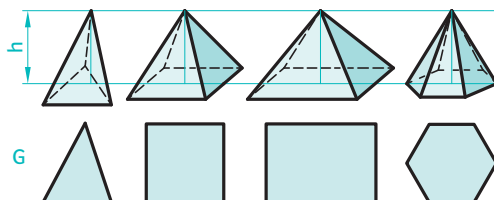
$$s^2 = h^2 + \frac{a^2}{2} = h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



Pyramide

$$O = G + M$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$



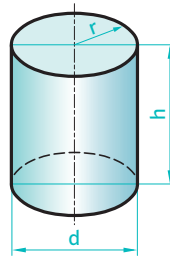
Zylinder, Kegel und Kugel

Zylinder

$$M = 2\pi \cdot r \cdot h$$

$$O = 2G + M = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



Kegel

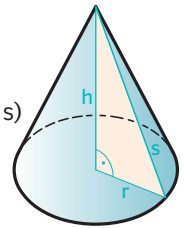
$$G = \pi \cdot r^2$$

$$M = \pi \cdot r \cdot s$$

$$O = G + M = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = \pi r(r + s)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

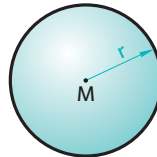
$$s^2 = h^2 + r^2$$



Kugel

$$O = 4\pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$



Formeln aus der Physik

Dichte ρ

$$\rho = \frac{m}{v}$$

m...Masse, v...Volumen

Geschwindigkeit v

$$v = \frac{s}{t}$$

s...Weg, t...Zeit

Kraft F

$$F = m \cdot a$$

m...Masse, a...Beschleunigung

Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

f...Brennweite,

b...Bildweite,

g...Gegenstandsweite

Widerstand

$$\text{Parallelschaltung: } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\text{Serienschaltung: } R = R_1 + R_2$$

R...Gesamtwiderstand

R_1, R_2 ...einzelne Widerstände