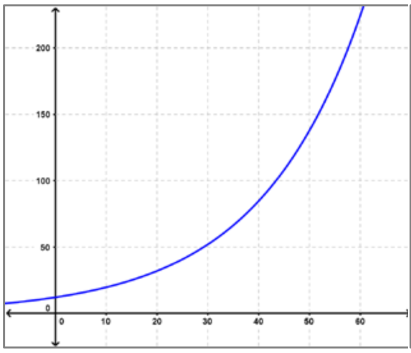
Ich kann kontinuierliche unbegrenzte, begrenzte und logistische Zu- und Abnahmeprozesse mithilfe von Exponentialfunktionen beschreiben, Aufgaben dazu mit Technologie lösen und die Ergebnisse interpretieren.

A, C **1** Ein Wachstumsprozess wird durch die Funktion f mit $f(x)=\frac{200}{1+15\cdot 0{,}85^x}$ beschrieben.

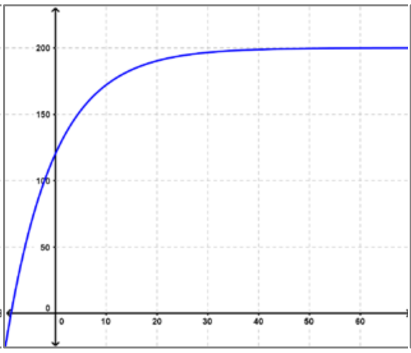
a. Beschreibe, um welches Wachstumsmodell es sich hier handelt.

b. Entscheide und kreuze an, welche der Abbildungen **A** bis **E** den richtigen Funktionsgraphen von f darstellt.

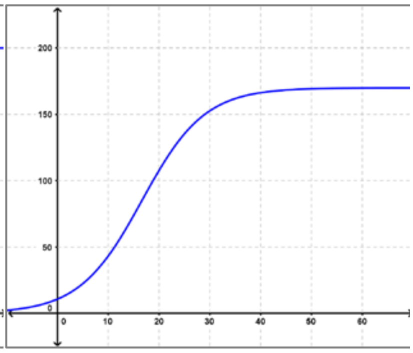
A



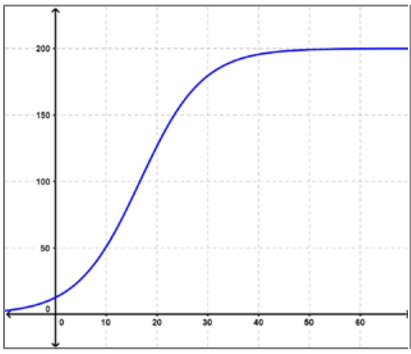
C



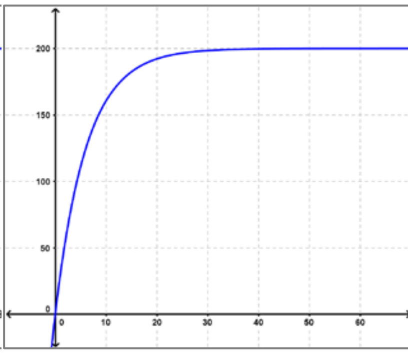
E



B



D



A, C **2** Die Zahlen a, b und c sind positive reelle Zahlen, wobei $0<c<1$ gilt. Ergänze jede Aussage so, dass sie richtig ist.

Die Funktion f mit $f(t)=a+b\cdot t$ beschreibt …	
Die Funktion f mit $f(t)=a\cdot(1-b\cdot c^t)$ beschreibt …	

A	einen linearen Wachstumsprozess, wobei a den Bestand zum Zeitpunkt 0 angibt.
B	einen beschränkten Wachstumsprozess, wobei a den Bestand zum Zeitpunkt 0 angibt.
C	einen linearen Wachstumsprozess, wobei a die Kapazitätsgrenze angibt.
D	einen beschränkten Wachstumsprozess, wobei a die Kapazitätsgrenze angibt.

A, C **3** Die Zahlen a, b und c sind positive reelle Zahlen, wobei $0<b<1$ und $c>1$ gilt. Ergänze jede Aussage so, dass sie richtig ist.

Die Funktion f mit $f(t)=\frac{a}{1+c\cdot b^t}$ beschreibt …	
Die Funktion f mit $f(t)=a\cdot c^t$ beschreibt …	

A	einen exponentiellen Wachstumsprozess, wobei a die Kapazitätsgrenze angibt.
B	einen exponentiellen Wachstumsprozess, wobei a die Menge zum Zeitpunkt 0 angibt.
C	einen logistischen Wachstumsprozess, wobei a die Kapazitätsgrenze angibt.
D	einen logistischen Wachstumsprozess, wobei a die Menge zum Zeitpunkt 0 angibt.

Ich kann kontinuierliche unbegrenzte, begrenzte und logistische Zu- und Abnahmeprozesse mithilfe von Exponentialfunktionen beschreiben, Aufgaben dazu mit Technologie lösen und die Ergebnisse interpretieren.

A, B **4** Eine neu entwickelte Handy-App wird am ersten Tag ($t = 0$) von 80 Personen heruntergeladen, nach 3 Wochen hat die App bereits 1560 Userinnen und User. Das Marktpotential für diese App wird auf 2,5 Million Downloads geschätzt. Man nimmt an, dass die Download-Zahlen bis zur Woche t durch eine logistische Wachstumsfunktion D mit

$$D(t) = \frac{K}{1 + c \cdot a^t}$$

beschrieben werden können.

a. Skizziere den charakteristischen Verlauf einer logistischen Wachstumsfunktion und kennzeichne auf dieser Skizze den Anfangswert sowie die Kapazitätsgrenze.

b. Ermittle die Koeffizienten K, c und a dieser Funktion. Runde a dabei auf zwei Nachkommastellen.

c. Berechne, wie viele Userinnen und User die App voraussichtlich nach 10 Wochen heruntergeladen haben werden.

d. Berechne, nach wie vielen Wochen die App von 2 Millionen Userinnen und Usern verwendet wird.

A, B, D **5** An einem Montag um 8:00 Uhr früh wird in einer Schule ein Gerücht in die Welt gesetzt. Zu Beginn wissen 3 Personen davon. Um 9:00 Uhr wissen bereits 22 Schülerinnen und Schüler von diesem Gerücht. Die Schule wird von 564 Schülern und Schülerinnen besucht. Die Anzahl N(t) an Schülerinnen und Schüler, die das Gerücht nach insgesamt t Stunden gehört haben, kann durch eine Funktion N mit $N(t) = K \cdot (1 - c \cdot a^t)$ beschrieben werden.

a. Ermittle die Koeffizienten K, c und a dieser Funktion und gib an, um welche Form des Wachstums es sich hier handelt.

b. Berechne, wie viele Schülerinnen und Schüler das Gerücht um 14 Uhr bereits gehört haben.

c. Stelle die Funktion graphisch dar und entnimm deiner Zeichnung, nach wie vielen Stunden 300 Personen das Gerücht gehört haben.

d. Überlege und argumentiere, welche Einschränkungen das theoretische Modell in der Praxis haben könnte.

A, B, D **6** In einem Teich lebt eine bestimmte Fischgattung. Aufgrund der begrenzten Ressourcen wie Futter, Sauerstoff und Platz, die der Teich bietet, ist die maximale Größe der Fischpopulation mit 1800 Fischen beschränkt. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums leben 480 Fische in diesem Teich, nach einem 13 Monaten werden 600 Fische gezählt. Die Anzahl F(t) der nach t Monaten im Teich lebenden Fische kann durch eine Funktion F mit $F(t) = K \cdot (1 - c \cdot a^t)$ beschrieben werden.

a. Ermittle die Koeffizienten K, c und a dieser Funktion und gib an, um welche Form des Wachstums es sich hier handelt. Runde a dabei auf vier Nachkommastellen.

b. Stelle die Funktion graphisch dar.

c. Berechne, nach wie vielen Monaten die Hälfte der Maximalkapazität erreicht wird.

d. Berechne, wie viele Fische nach 3 Jahren voraussichtlich im Teich leben werden.

A, B, D **7** Ein Mittelstreckenläufer benötigt zu Beginn einer intensiven Trainingsperiode 4:40 Minuten (das heißt 4 Minuten 40 Sekunden) für 1500m. Im Laufe des Trainings verbessert er seine Laufleistung kontinuierlich. Nach fünf Wochen intensiven Trainings benötigt er nur noch 4:30 Minuten. Ein sportwissenschaftliches Modell geht davon aus, dass die Geschwindigkeit V eines Mittelstreckenläufers zum Zeitpunkt t mit einer logistischen Funktion V(t) mit $V(t) = \frac{5{,}80}{1 + c \cdot a^t}$ (in m/s) beschrieben werden kann. Runde bei deinen Berechnungen alle Geschwindigkeiten auf zwei Nachkommastellen.

a. Ermittle die Koeffizienten c und a dieser Funktion. Runde dabei c und a jeweils auf drei Nachkommastellen.

b. Gib an, von welcher maximalen Laufgeschwindigkeit dieses Modell ausgeht und welche theoretische Bestleistung (= Laufzeit) der Mittelstreckenläufer daher erzielen kann.

c. Der Trainingszyklus des Läufers dauert insgesamt 10 Wochen. Berechne, welche Laufgeschwindigkeit das Modell für das Ende des Trainingszyklus prognostiziert.

d. Argumentiere anhand des Modells, ob der Läufer am Ende des Trainingszyklus (theoretisch) in der Lage wäre, ein Wettkampflimit von 4:23 Minuten für 1500m zu unterbieten.

Ich kann kontinuierliche unbegrenzte, begrenzte und logistische Zu- und Abnahmeprozesse mithilfe von Exponentialfunktionen beschreiben, Aufgaben dazu mit Technologie lösen und die Ergebnisse interpretieren.

C **8** Entscheide und kreuze an, welche der Antworten **A** bis **E** korrekt ist.

- **A** Logistisches Wachstum verläuft zu Beginn annähernd logarithmisch.
- **B** Beschränktes Wachstum verläuft zu Beginn annähernd linear.
- **C** Gebremstes Wachstum verläuft anfangs annähernd exponentiell.
- **D** Lineares Wachstum wird von einer Kapazitätsgrenze beschränkt.
- **E** Exponentielles Wachstum verläuft anfangs annähernd linear.

C **9** Ergänze jede Aussage so, dass sie richtig ist.

Ein Wachstum, das zu Beginn linear verläuft, sich vor Erreichen einer Kapazitätsgrenze aber langsam einbremst, nennt man…	
Ein Wachstum, das zu Beginn exponentiell verläuft, sich vor Erreichen einer Kapazitätsgrenze aber langsam einbremst, nennt man…	

A	logistisches Wachstum.
B	beschränktes Wachstum.
C	logarithmisches Wachstum.
D	existentielles Wachstum.

Autorin: Bettina Ponleitner

Lösungen zu:
Ich kann kontinuierliche unbegrenzte, begrenzte und logistische Zu- und Abnahmeprozesse mithilfe von Exponentialfunktionen beschreiben, Aufgaben dazu mit Technologie lösen und die Ergebnisse interpretieren.

1 a. logistisches Wachstumsmodell
b. Abbildung B

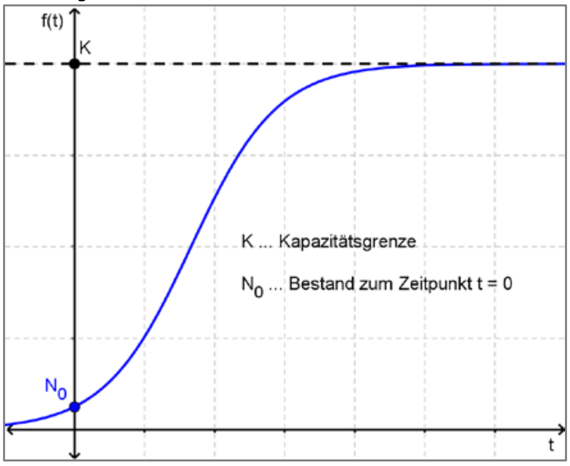
2

Die Funktion f mit $f(t)=a+b\cdot t$ beschreibt …	A
Die Funktion f mit $f(t)=a\cdot\left(1-b\cdot c^t\right)$ beschreibt …	D

3

Die Funktion f mit $f(t)=\dfrac{a}{1+c\cdot b^t}$ beschreibt …	C
Die Funktion f mit $f(t)=a\cdot c^t$ beschreibt …	B

4 a. Skizze einer logistischen Funktion f(t)



b. $K=2500000$, $c=31249$ $a=0{,}37145\ldots\approx 0{,}37$; $\Rightarrow D(t)=\dfrac{2500000}{1+31249\cdot 0{,}37^t}$

c. $D(10)=998947$ User

d. nach ca. 12 Wochen ($t=11{,}80\ldots$)

5 a. $K=564$, $c=\dfrac{187}{188}$ $a=\dfrac{542}{561}$; $\Rightarrow N(t)=564\cdot\left(1-\dfrac{187}{188}\cdot\left(\dfrac{542}{561}\right)^t\right)$;

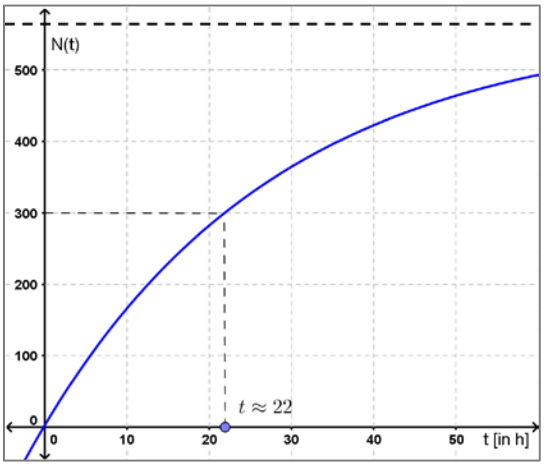
Es handelt sich um ein Modell für beschränktes Wachstum.

b. um 14:00 Uhr, d.h. nach 6 Stunden: $N(6)\approx 108$ Personen (107,77…)

c. nach ca. 22 Stunden

Autorin: Bettina Ponleitner

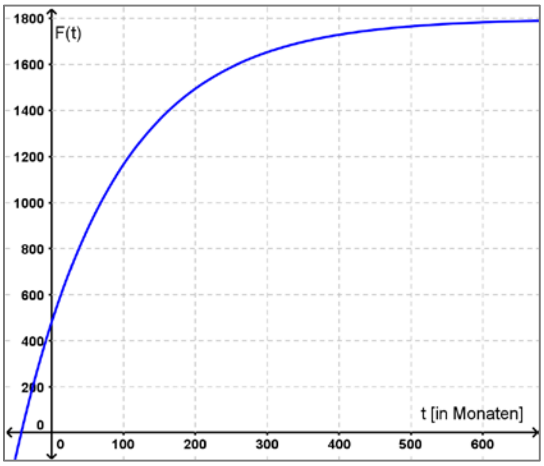
Lösungen zu:
Ich kann kontinuierliche unbegrenzte, begrenzte und logistische Zu- und Abnahmeprozesse mithilfe von Exponentialfunktionen beschreiben, Aufgaben dazu mit Technologie lösen und die Ergebnisse interpretieren.



d. Einschränkungen in der Praxis: Die Obergrenze wird im Modell nie erreicht, sondern, die Funktion nähert sich nur beliebig nahe der Obergrenze an. In der Realität werden aber irgendwann alle Schülerinnen und Schüler vom Gerücht gehört haben.
Das Modell geht davon aus, dass das Gerücht permanent weitererzählt wird. In der Realität wird aber in der Nacht vermutlich niemand das Gerücht weitererzählen.

6 **a.** $K = 1800$, $c = \frac{11}{15}$ $a \approx 0{,}9927$; $\Rightarrow F(t) = 1800 \cdot \left(1 - \frac{11}{15} \cdot 0{,}9927^t\right)$;
Es handelt sich um ein Modell für beschränktes Wachstum.

b.



c. Hälfte der Maximalkapazität = 900 Fische; nach ca. 4 Jahren 4 Monaten (t = 52,2…Monate)
d. 3 Jahre = 36 Monate; F(36) = 786 Fische

7 **a.** $c \approx 0{,}082$ $a = 0{,}8795... \approx 0{,}880$; $\Rightarrow F(t) = \dfrac{5{,}80}{1 + 0{,}082 \cdot 0{,}880^t}$

b. angenommene maximale Laufgeschwindigkeit: 5,80 m/s; Diese Geschwindigkeit entspricht einer theoretischen Bestleistung von 4:18,62 Minuten für 1500 m.

c. V(10) = 5,67 m/s

d. Die prognostizierte Laufgeschwindigkeit am Ende des Trainingszyklus beträgt 5,67 m/s. Das entspricht einer Laufzeit von 4:24,55 Minuten über 1500m. Voraussichtlich wird der Läufer daher das Wettkampflimit von 4:23 Minuten am Ende dieses Trainingszyklus nicht unterbieten können.

Lösungen zu:
Ich kann kontinuierliche unbegrenzte, begrenzte und logistische Zu- und Abnahmeprozesse mithilfe von Exponentialfunktionen beschreiben, Aufgaben dazu mit Technologie lösen und die Ergebnisse interpretieren.

8 B Beschränktes Wachstum verläuft zu Beginn annähernd linear.

9

Ein Wachstum, das zu Beginn linear verläuft, sich vor Erreichen einer Kapazitätsgrenze aber langsam einbremst, nennt man…	B
Ein Wachstum, das zu Beginn exponentiell verläuft, sich vor Erreichen einer Kapazitätsgrenze aber langsam einbremst, nennt man…	A

Autorin: Bettina Ponleitner