1 STAMMFUNKTION UND INTEGRAL

W 1.01 Wie ist eine Stammfunktion definiert?

W 1.02 Es sei F eine Stammfunktion von f, G eine Stammfunktion von g und $k \in \mathbb{R}$. Wie kann man eine Stammfunktion von $f + g$, $f - g$ bzw. $k \cdot f$ finden?

W 1.03 Erkläre, wie man mit Hilfe von Unter- und Obersummen näherungsweise den Inhalt der Fläche, die von der Funktion f mit $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 3]$ festgelegt wird, berechnen kann!

W 1.04 Was versteht man unter $\int_a^b f(x)dx$? Was muss für f vorausgesetzt werden?

W 1.05 Die Funktion f sei in $[a; b]$ stetig und nehme keine negativen Werte an. Begründe, dass man die von f in $[a; b]$ festgelegte Fläche als Integral darstellen kann!

W 1.06 Wie kann man ein Integral mit Hilfe einer Stammfunktion berechnen?

W 1.07 Nenne einige Sätze über Integrale!

W 1.01 Sind f und F reelle Funktionen mit derselben Definitionsmenge A und gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in A$, dann heißt F eine Stammfunktion von f.

W 1.02 Sind F und G Stammfunktionen von f bzw. g, dann gilt:
- $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.
- $F - G$ ist eine Stammfunktion von $f - g$.
- $k \cdot F$ ist eine Stammfunktion von $k \cdot f$ (wobei $k \in \mathbb{R}$).

W 1.03 Man kann den Flächeninhalt näherungsweise berechnen, indem man das Intervall [a; b] in Teilintervalle zerlegt. Über den Teilintervallen errichtet man Rechtecke, die der betrachteten Fläche ein- bzw. umgeschrieben sind. Die Summe der Inhalte der eingeschriebenen (umgeschriebenen) Rechtecke nennt man Untersumme (Obersumme) für A(a; b). Durch die Untersumme (Obersumme) erhält man eine untere (obere) Schranke für A(a; b). Untersumme und Obersumme schätzen den Flächeninhalt A(a; b) im Allgemeinen umso genauer ab, in je mehr Teilintervalle [a; b] zerlegt wird.
Für die Funktion f mit $f(x) = x^2$ können die ersten drei Näherungen folgendermaßen aussehen:

1. Näherung: Wir fügen in das Intervall [0; 3] keinen Teilungspunkt ein.
Untersumme $= f(0) \cdot 3 = 0 \cdot 3 = 0$
Obersumme $= f(3) \cdot 3 = 9 \cdot 4 = 32$
Daraus folgt: $0 \leq A(0; 3) \leq 32$

2. Näherung: Wir teilen das Intervall [0; 3] in drei gleich lange Teilintervalle.
Untersumme $= f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 = 5$
Obersumme $= f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = 14$
Daraus folgt: $5 \leq A(0; 3) \leq 14$

3. Näherung: Wir teilen das Intervall [0; 3] in sechs gleich lange Teilintervalle.
Untersumme $= f(0) \cdot 0{,}5 + f(0{,}5) \cdot 0{,}5 + \ldots + f(2) \cdot 0{,}5 + f(2{,}5) \cdot 0{,}5 = 6{,}875$
Obersumme $= f(0{,}5) \cdot 0{,}5 + f(1) \cdot 0{,}5 + \ldots + f(2{,}5) \cdot 0{,}5 + f(3) \cdot 0{,}5 = 11{,}375$
Daraus folgt: $6{,}875 \leq A(0; 3) \leq 11{,}375$

W 1.04 Es sei f eine im Intervall [a; b] reelle Funktion. Die eindeutig bestimmte reelle Zahl I, die „zwischen" allen Untersummen U und allen Obersummen von f in [a; b] liegt (genauer: $U \leq I \leq O$), nennt man das (bestimmte) Integral von f in [a; b] und schreibt:
$I = \int_a^b f(x)\,dx$
Dabei muss f als stetig vorausgesetzt werden.

W 1.05 Es sei f eine in einem Intervall [a; b] stetige Funktion, die nur nichtnegative Werte annimmt, und A(a; b) der Inhalt der von f in [a; b] festgelegten Fläche. Die Unter- und Obersummen von f in [a; b] kann man als Summen der Inhalte von eingeschriebenen bzw. umgeschriebenen Rechtecken geometrisch deuten. Damit ist anschaulich klar, dass für alle Untersummen U und alle Obersummen O von f in [a; b] gilt: $U \leq A(a; b) \leq O$
Weiteres gilt aufgrund der Definition des Integrals für alle Untersummen U und alle Obersummen O in [a; b]: $U \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq O$
Da es genau eine reelle Zahl gibt, die „zwischen" allen Untersummen U und allen Obersummen von f in [a; b] liegt, muss gelten:
$A(a; b) = \int_a^b f(x)\,dx$

W 1.06 Ist die reelle Funktion f im Intervall [a; b] stetig und ist F eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

W 1.07
- Die reelle Funktion f sei im Intervall [a; b] stetig und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f$
- Die reellen Funktionen f und g seien im Intervall [a; b] stetig. Dann gilt: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Die reelle Funktion f sei im Intervall [a; c] stetig und es sei $a < b < c$. Dann gilt: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$