

## Trigonometrische Funktionen spitzer Winkel

Führt in eurer Klasse folgendes Experiment durch.

- Jede/jeder von euch zeichnet ein rechtwinkeliges Dreieck, bei dem ein Winkel  $\frac{\pi}{6}$  rad (30°) ist und misst dann die Seiten dieses Dreiecks ab.
- Dann berechnet jede/jeder den Quotienten der Kathete, die dem Winkel  $\frac{\pi}{6}$  rad gegenüber liegt, und der Kathete, die an dem Winkel  $\frac{\pi}{6}$  rad anliegt.
- Vergleicht eure Ergebnisse. Was fällt euch auf?

Der Quotient der zwei Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck, so wie ihr ihn gerade berechnet habt, hängt nur von seinen Winkeln ab, und nicht von den Seitenlängen des Dreiecks. Das können wir so zeigen:

Wir wählen in der Ebene ein rechtwinkeliges Koordinatensystem. Ist P ein Punkt mit den Koordinaten  $(x|y)$ , dann ist das Dreieck mit den Eckpunkten  $O = (0|0)$ ,  $P = (x|y)$  und  $A = (x|0)$  rechtwinkelig. Wir können der Einfachheit halber annehmen, dass  $x$  und  $y$  positive Zahlen sind. Die Hypotenuse ist die Strecke  $OP$ . Die Längen der Katheten sind  $x$  und  $y$ . Nach dem Satz von Pythagoras ist die Länge der Hypotenuse, also der Abstand zwischen  $O$  und  $P$ , gleich

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Gerade durch  $O$  und  $P$  ist die Menge  $\{t \cdot P \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Ist  $t$  eine positive reelle Zahl, dann ist der Abstand zwischen  $O$  und  $t \cdot P = (t \cdot x \mid t \cdot y)$  gleich

$$\sqrt{(t \cdot x)^2 + (t \cdot y)^2} = t \cdot \sqrt{x^2 + y^2},$$

also das  $t$ -Fache des Abstandes zwischen  $O$  und  $P$ .

Der Abstand zwischen  $t \cdot P$  und  $t \cdot A = (t \cdot x \mid 0)$  ist  $t \cdot y$ , das  $t$ -Fache des Abstandes zwischen  $P$  und  $A$ . Ebenso ist der Abstand zwischen  $O$  und  $t \cdot A$  das  $t$ -Fache des Abstandes zwischen  $O$  und  $A$ .

Der Quotient von zwei Seitenlängen im Dreieck  $\Delta OPA$  ist dieselbe Zahl wie der Quotient dieser Seitenlängen im Dreieck  $\Delta O(t \cdot P)(t \cdot A)$ . Diese Quotienten hängen somit nur vom Winkel beim Eckpunkt  $O$  ab und nicht von den Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks.

Ebenso sind die spitzen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck durch den Quotienten der Längen zweier Seiten des Dreiecks eindeutig festgelegt.

