3 UNTERSUCHEN VON POLYNOMFUNKTIONEN

W 3.01 Wann heißt eine Funktion (streng) monoton steigend bzw. (streng) monoton fallend?

W 3.02 Wie kann man die Monotonieintervalle einer Polynomfunktion ermitteln? Welche Sätze werden dabei verwendet?

W 3.03 Was ist eine globale, was eine lokale Extremstelle einer reellen Funktion?

W 3.04 Wie kann man die lokalen Extremstellen einer Polynomfunktion ermitteln? Welche Sätze werden dabei verwendet?

W 3.05 Wann heißt eine Funktion linksgekrümmt, wann rechtsgekrümmt?

W 3.06 Wie kann man die Krümmungsintervalle einer Polynomfunktion ermitteln? Welche Sätze werden dabei verwendet?

W 3.07 Was ist eine Wendestelle einer Funktion? Wie kann man die Wendestellen einer Polynomfunktion ermitteln?

W 3.08 Beschreibe, wie man aus dem Graphen einer Funktion f den Graphen von f′ erhalten kann!

W 3.09 Beschreibe, wie man aus dem Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f den Graphen von f erhalten kann! Ist dieser eindeutig bestimmt?

W 3.10 Wie kann man Extremwertaufgaben mit Hilfe der Ableitung lösen? Erläutere das Vorgehen anhand von mehreren Schritten!

W 3.01 Es sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und M eine Teilmenge von A. Die Funktion f heißt
- monoton steigend in M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- monoton fallend in M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- streng monoton steigend in M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- streng monoton fallend in M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

W 3.02 Man ermittelt die Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_k$ von f′. Durch diese wird die Definitionsmenge von f in die Monotonieintervalle zerlegt. In diesen Intervallen ist f entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend (denn andernfalls müsste im Inneren eines solchen Intervalls eine weitere Nullstelle von f′ liegen).

Monotoniesatz: Ist $f: A \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und I eine Teilmenge von A ein Intervall, dann gilt:
(1) $f'(x) > 0$ für alle inneren Stellen $x \in I \Rightarrow f$ streng monoton steigend in I
(2) $f'(x) < 0$ für alle inneren Stellen $x \in I \Rightarrow f$ streng monoton fallend in I

W 3.03 Sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Stelle $p \in A$ heißt
- globale Extremstelle von f, wenn p globale Maximumstelle oder globale Minimumstelle von f ist.
- lokale Extremstelle von f, wenn sie eine lokale Maximumstelle oder lokale Minimumstelle von f ist, dh. wenn es eine Umgebung $U(p) \subseteq A$ gibt, sodass p Maximumstelle bzw. Minimumstelle von f in U(p) ist.

W 3.04 Man ermittelt die Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_k$ von f′. Durch diese wird die Definitionsmenge von f in die Monotonieintervalle zerlegt. In diesen Intervallen ist f entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend (denn andernfalls müsste im Inneren eines solchen Intervalls eine weitere Nullstelle von f′ liegen).
Man berechnet die Funktionswerte an den Stellen $x_1, x_2, ..., x_k$. Daraus erkennt man das Monotonieverhalten in den Intervallen $[x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{k-1}, x_k]$.
Um das Monotonieverhalten in den Intervallen $(-\infty, x_1)$ bzw. (x_k, ∞) zu ermitteln, berechnet man jeweils einen weiteren Funktionswert an einer beliebigen Stelle aus dem Inneren dieser beiden Intervalle.
Man skizziert den Graphen von f und beachtet dabei, dass an den Stellen $x_1, x_2, ..., x_k$ die Tangenten an den Graphen zur ersten Achse parallel sind.
Notwendige Bedingung für eine lokale Extremstelle:
Für jede Polynomfunktion f gilt: p ist lokale Extremstelle von $f \Rightarrow f'(p) = 0$.
Hinreichende Bedingung für eine lokale Extremstelle:
Für jede nicht konstante Polynomfunktion f gilt: Ändert f an der Stelle p das Monotonieverhalten, dann ist p eine lokale Extremstelle von f.

W 3.05 Es sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, $f': A \to \mathbb{R}$ ihre Ableitung und $I \subseteq A$ ein Intervall.
Die Funktion f heißt linksgekrümmt in I, wenn f′ streng monoton steigend in I ist.
Die Funktion heißt rechtsgekrümmt in I, wenn f′ streng monoton fallend in I ist.

W 3.06 Ist $f: A \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $I \subseteq A$ ein Intervall, dann gilt:
(1) $f''(x) > 0$ für alle inneren Stellen $x \in I \Rightarrow f$ linksgekrümmt in I
(2) $f''(x) < 0$ für alle inneren Stellen $x \in I \Rightarrow f$ rechtsgekrümmt in I
Durch die Nullstellen von f″ wird der Definitionsbereich von f in die Krümmungsintervalle (Krümmungsbereiche) zerlegt. Im Inneren jedes dieser Intervalle besitzt f″ ein einheitliches Vorzeichen. (Denn würde f″ im Inneren eines solchen Intervalls das Vorzeichen ändern, dann müsste im Inneren dieses Intervalls eine weitere Nullstelle von f″ liegen.) Nach dem Krümmungssatz ist somit f in einem Krümmungsintervall einheitlich gekrümmt. Um die Art der Krümmung in einem Krümmungsintervall festzustellen, genügt es, das Vorzeichen von f″ an einer beliebigen inneren Stelle $p \in I$ zu ermitteln, denn f″ besitzt ja an allen inneren Stellen von I dasselbe Vorzeichen. Man kann dann schließen:
$f''(p) > 0 \Rightarrow f$ ist linksgekrümmt in I bzw. $f''(p) < 0 \Rightarrow f$ ist rechtsgekrümmt in I

W 3.07 Sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Stelle $p \in A$ heißt Wendestelle von f, wenn sich an der Stelle p das Krümmungsverhalten von f ändert. Eine Wendestelle p einer Polynomfunktion f ist eine lokale Extremstelle der Ableitung f′.
Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:
Für jede Polynomfunktion f gilt: p ist eine Wendestelle von $f \Rightarrow f''(p) = 0$.
Hinreichende Bedingung für eine Wendestelle:
Ist $f: A \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, $I \subseteq A$ ein Intervall und p eine innere Stelle von I, dann gilt:
$f''(p) = 0 \wedge f'''(p) \neq 0 \Rightarrow$ p ist Wendestelle von f.

W 3.08 Man muss die Tangentensteigung von f abschätzen und als Funktionswert von f′ auftragen. Hilfreich ist die Tatsache, dass bei lokalen Extremstellen die Tangentensteigung immer 0 ist.

W 3.09 Aus den Funktionswerten von f′ erkennt man, in welchen Intervallen f streng monoton fallend oder steigend ist. Nullstellen von f′ sind lokale Extremstellen von f. Eindeutig kann f aus f′ nicht ermittelt werden.

W 3.10 1. Schritt: Die „Zielgröße" ist aufgrund der Frage, welche Größe maximal bzw. minimal werden soll, festzulegen.
2. Schritt: Die Zielgröße ist als Funktion mehrerer Variablen anzuschreiben.
3. Schritt: Nebenbedingung(en) sind anhand der Angabe zu suchen und alle Variablen durch eine einzige auszudrücken.
4. Schritt: Das Ergebnis ist in den Term der Funktion einzusetzen und die erhaltene Funktion als Funktion in einer Variablen („Zielfunktion") anzuschreiben. Der Definitionsbereich ist anzugeben.
5. Schritt: Die Nullstellen der 1. Ableitung dieser Funktion sind zu berechnen. Ein Vergleich der Werte an diesen Stellen mit den Werten an den Randstellen des Definitionsintervalls liefert die gesuchte Extremstelle im Definitionsbereich.