

490)

a) 1)

Aussage A: Gleichung (i) besitzt für $r = 0$ genau eine reelle Lösung.

$$a \cdot x^2 + r = 0 \quad | r = 0$$

$$a \cdot x^2 = 0 \quad | : a$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 0 \quad \rightarrow \text{Die Aussage stimmt.}$$

Aussage B: Gleichung (ii) besitzt für ein beliebiges $h (\neq 0)$ genau zwei reelle Lösungen.

$$a \cdot x^2 + h \cdot x = 0 \quad | x \text{ herausheben}$$

$$x \cdot (ax + h) = 0 \quad | \text{Produkt-Null-Satz anwenden}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x_1 = 0 \quad ax + h = 0 \quad | - h$$

$$\downarrow$$

$$ax = -h \quad | : a$$

$$\downarrow$$

$$x_2 = -\frac{h}{a} \quad \rightarrow \text{Die Aussage stimmt.}$$

Aussage C: Gleichung (iii) besitzt für ein beliebiges r genau zwei reelle Lösungen.

Die Aussage stimmt nicht. Ist $r = 0$, so hat die Gleichung nur eine Lösung.

$$(x - u)^2 = r \quad | r = 0$$

$$(x - u)^2 = 0 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - u = 0 \quad | + u$$

$$x = u \quad \rightarrow \text{Die Aussage stimmt nicht.}$$

Aussage D: Gleichung (i) besitzt für $r > 0$ genau zwei reelle Lösungen.

$$a \cdot x^2 + r = 0 \quad | - r$$

$$a \cdot x^2 = -r \quad | : a$$

$$x^2 = -\frac{r}{a} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{1,2} = \sqrt{-\frac{r}{a}} \quad \rightarrow \text{Keine reelle Lösung, die Aussage stimmt nicht.}$$

Aussage E: Gleichung (iv) besitzt für $k > 0$ keine reelle Lösung.

$$x^2 + ox + k = 0 \quad | \text{kleine Lösungsformel anwenden} \quad p = o \quad k = q$$

$$x_{1,2} = -\frac{o}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{o}{2}\right)^2 - k}$$

Wenn die Gleichung keine reelle Lösung besitzt, so ist die Diskriminante negativ.

$$D = \left(\frac{o}{2}\right)^2 - k < 0 \quad | + k$$

$$\frac{o^2}{2} < k \quad \rightarrow \text{Die Aussage ist nicht in jedem Fall zutreffend, sondern hängt von } o \text{ ab.}$$

Lösung: A, B

b) 1)



Die Gleichung $ax^2 + r = 0$ besitzt unter bestimmten Voraussetzungen zwei reelle Lösungen, die Gleichung $x = \sqrt{-\frac{r}{a}}$ nur eine. Die Gleichungen sind also nicht äquivalent. Bei einer Äquivalenzumformung würde die Anzahl der Lösungen bzw. die Lösung selbst durch Rechenoperationen nicht verändert werden (z.B. addieren von 3 auf beiden Seiten). Quadratwurzelziehen ist daher keine Äquivalenzumformung.

2)

$$\begin{array}{ll}
 a \cdot x^2 + h \cdot x = 0 & | \text{ x herausheben} \\
 x \cdot (ax + h) = 0 & | \text{ Produkt-Null-Satz anwenden} \\
 \downarrow \quad \downarrow & \\
 x_1 = 0 \quad ax + h = 0 & | - h \\
 \downarrow & \\
 ax = -h & | : a \\
 \downarrow & \\
 x_2 = -\frac{h}{a} &
 \end{array}$$

Bei Gleichungen dieser Form ist immer eine Lösung Null.

c) 1)

$$x^2 + ox + k = 0$$

$$(x - u)^2 = r \quad \rightarrow x^2 - 2ux + u^2 = r \quad | - r \quad \rightarrow x^2 - 2ux + u^2 - r = 0$$

$$o = -2u \quad \leftrightarrow -\frac{o}{2} = u$$

$$k = u^2 - r \quad \leftrightarrow k - u^2 = -r \quad \leftrightarrow -k + u^2 = r$$

$$-k + \left(-\frac{o}{2}\right)^2 = r \quad \rightarrow -k + \frac{o^2}{4} = r$$

