Mathematik verstehen 3

Es geht weiter …

Das Einstiegskapitel ist traditionell nicht nummeriert und bietet den Lernenden die Möglichkeit, das Gelernte aus dem vergangenen Schuljahr zu wiederholen und zu festigen. Drei Einstiegsaufgaben aus dem Inhaltsbereich I4 (Statistische Darstellungen und Kenngrößen) beziehen sich auf die momentane Alltagswelt der Schülerinnen und Schüler und verbinden persönliche Erfahrungen mit dem Darstellen und Interpretieren von Datenmengen. In weiterer Folge wird an die Lernbereiche der vorangegangenen Schulstufe angeknüpft, indem Aufgaben in diversen Formaten (Ausfüllen, Multiple-Choice-Aufgaben, Textaufgaben, einfache Rechenaufgaben, Lückentexte, Zuordnungsaufgaben etc.) zu Teilern, Zahlen in Bruch-, Dezimal- und Prozentdarstellungen die wesentlichen Kenntnisse auffrischen sollen. Aufgaben zu Bereichen der Geometrie bereiten in vielfältigen Formaten die wichtigsten Lernziele in vermischten Übungen neu auf und konsolidieren den Kenntnisstand. In einer spielerischen Schlussaufgabe sind die meisten Bereiche der fünften und sechsten Schulstufe gefragt.

Die weiteren Kapitel sind durchnummeriert. Die Aufgabennummern sind so konzipiert, dass die jeweilige Kapitelnummer vor dem Punkt erkennbar ist, zB im Kapitel 1 Aufgaben wie 1.72, im Kapitel 2 Aufgaben wie 2.46 usw. Dies hat den Vorteil der besseren Orientierung und Zuordnung im Lehrbuch bereits anhand der Aufgabennummern und im Unterricht beim Angeben von Schul- und vor allem Hausübungsaufgaben.

1 Ganze Zahlen

In einer ernsthaften Hinführung zum Bereich der negativen Zahlen muss zunächst die Vorstellung bei den Lernenden geschaffen werden, dass es notwendig ist, Zahlen gegenüber einer Nulllinie bzw. einem Nullpunkt unterschiedlich zu deuten, bevor das Minus-Vorzeichen zur Anwendung kommt. Dies geschieht hier auf drei verschiedene Arten – mit Aufgaben aus dem Sport, der Geografie und der Temperaturmessung, mit denen die Jugendlichen in der Regel etwas gedanklich Fassbares verbinden können. Erst nach dem Erarbeiten dieses gegensätzlichen Deutens von Zahlen wird das negative Vorzeichen als Unterscheidungskriterium eingeführt und in weiteren Aufgaben gefestigt.

Der nächste Schritt beim Entwickeln von Grundvorstellungen zu den negativen ganzen Zahlen ist die Erweiterung des Zahlenstrahls nach links zur Zahlengeraden. Ganz wichtig hierbei ist, dass die Schülerinnen und Schüler selbst diesen Schritt setzen (Aufgabe 1.07) und damit dieses Problem lösen. Im Zuge des Arbeitens mit der Zahlengeraden werden bereits die ersten Ideen zum Einsetzen der Grundrechenarten entwickelt (Aufgaben 1.13 bis 1.16), ohne dass dieser Aspekt zunächst explizit genannt wird. Dennoch ist hierbei Vorsicht geboten, da in der Regel die negativen ganzen Zahlen zu diesem Zeitpunkt noch nicht als eigenständige Denkobjekte von den Lernenden aufgefasst werden. Dies wird in der Folge gezielt bei der Anordnung der ganzen Zahlen problematisiert. Hier wird bewusst die Möglichkeit einer spiegelbildlichen Ordnung vorgestellt, anhand derer die pragmatische Notwendigkeit der üblichen, der fortlaufenden Anordnung erfahren werden soll. Aufgaben in vielfältigen Formaten bekräftigen diese gewonnenen Erkenntnisse.

Am Beginn der Abschnitte zu den Grundrechenarten steht die bereits zuvor etablierte Vorstellung einer Punkt-Pfeil-Darstellung mit den essentiellen Hinweisen, dass ein nach rechts weisender Pfeil „vermehren“ und ein nach links weisender Pfeil „vermindern“ bedeutet, und zwar unabhängig davon, ob man sich nun auf der Zahlengeraden links oder rechts von null befindet.
Dass es sich bei negativen ganzen Zahlen um eigenständige Denkobjekte handelt, wird durch die Klammernschreibweise bei Addition und Subtraktion deutlich untermauert. Auch wenn dies manchen Lernenden lästig und unnötig vorkommen mag, so ist diese Schreibweise unerlässlich dafür, dass die Vorstellung von eigenständige Denkobjekten gefestigt wird und zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen zunächst betont unterschieden wird. Das „Positiv-Negativ-Spiel“ (Aufgabe 1.46) soll hierzu einen wesentlichen Beitrag leisten. Dieses wird in den Aufgaben 1.47 und 1.48 wieder aufgegriffen und erst bei den Rechenregeln wird auf die vereinfachte Schreibweise verwiesen. Die folgenden Aufgaben thematisieren diesen bedeutsamen Aspekt noch sehr bewusst.

Die verständige Anwendung der korrekten Multiplikation mit negativen ganzen Zahlen stellt erfahrungsgemäß die größte Herausforderung im Unterricht für Schülerinnen und Schüler in diesem Kapitel dar. Natürlich ließen sich die Rechenregeln einfach nur auswendig lernen, dies würde jedoch massiven Verständnisproblemen in algebraischen und funktionalen Belangen den roten Teppich auslegen. Daher wird versucht, anhand der Musteraufgaben 1.73 und 1.74 die Problematik nach dem Permanenzprinzip aufzurollen: Da man nicht möchte, dass die Einführung der negativen Zahlen zur Folge hätte, dass bereits aufgebaute Vorstellungen verworfen werden müssten, soll eine reibungslose Übertragbarkeit von Rechenregeln das Ziel sein. Damit also Gewohntes weiterhin gelten kann (zB der konsequente Temperaturverlauf in den erwähnten beiden Musteraufgaben), werden die Rechenregeln für die Multiplikation eben danach folgend festgesetzt. Viele Aufgaben zur Verankerung der Regeln folgen. Die Division wird als logische Konsequenz in Form einer Probe für die Multiplikation eingeführt. Daraus lassen sich die Rechenregeln festlegen.

Beim Verbinden aller vier Grundrechenarten werden die Vorrangregeln dem Permanenzprinzip folgend als weiterhin gültig angeführt und dazu Aufgaben zum Festigen des Gelernten angeboten.

2 Rationale Zahlen

Analog zur Einführung der ganzen Zahlen wird das Kapitel zu den rationalen Zahlen mit einer Aufgabe über Orte knapp oberhalb bzw. knapp unterhalb des Meeresspiegels eröffnet. Dies ermöglicht einerseits ein Herstellen der Verbindung zur gleichen Grundlage des gegensätzlichen Deutens von Zahlen gegenüber einem Nullpunkt wie bei den ganzen Zahlen und andererseits die notwendige und logische Erweiterung um die feinere Unterteilung der Zahlen. Die Vorstellungen zu negativen Zahlen werden gefestigt und bei Aufgabe 2.02 sogleich auf die Zahlengerade gelenkt. Es folgen die notwendigen Definitionen, Zahlenbeispiele und vielfältige Aufgaben – auch zur periodischen Dezimaldarstellung, anknüpfend an deren Einführung in Mathematik verstehen 2, Seite 55ff.

Ebenfalls analog zur Einführung der ganzen Zahlen wird die Ordnung der rationalen Zahlen thematisiert. Besonderes Augenmerk wird darauf gelegt, dass Bruch- und Dezimaldarstellung gleichermaßen in diesem Bereich angeführt werden. Dies soll verstärkt die Tatsache vermitteln, dass beide Darstellungen für rationale Zahlen gleichberechtigt sind und die eine oder die andere je nach Präferenz und situationsbezogener Sinnhaftigkeit herangezogen werden kann. Weiterführend kann bei Interesse über das CANTOR-Schema der Anordnung der rationalen Zahlen reflektiert werden.

Beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren rationaler Zahlen steht bei den Rechenregeln die Bruchdarstellung stärker im Fokus als die Dezimaldarstellung, da das Regelwerk für die Grundrechenarten erfahrungsgemäß mehr Übung im Umgang mit Brüchen als mit Nachkommaziffern erfordert. Nichtsdestotrotz sind Zahlen in Dezimaldarstellung immer wieder präsent, was das Verständnis für die Darstellungsmöglichkeiten in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ stärken soll.

Dem Absolutbetrag einer rationalen Zahl wird ganz bewusst nur ein kurzer Abschnitt gewidmet, da die Zweckmäßigkeit dieser Angabe von Zahlen im gegenwärtigen Lernprozess um positive und negative Zahlen eher hinderlich als zweckmäßig ist. Es spricht zwar nichts gegen die Kenntnis der sogenannten Betragsstriche, eine wirklich sinnvolle Anwendung findet sich jedoch erst im innermathematischen Zusammenhang mit Variablen, Gleichungen und Ungleichungen für spezielle Intervalle (siehe Aufgabe 2.72).

Beim Verbinden der vier Grundrechenarten mit rationalen Zahlen werden abermals die Vorrangregeln und die elementaren Rechengesetze genannt um den Lernenden zu verdeutlichen, dass die Zahlbereichserweiterung keine Auswirkung auf bisher Gelerntes hat, dh. die wesentlichen Rechenregeln und -gesetze weiterhin ihre Gültigkeit haben. Zum ersten Mal jedoch lässt sich erkennen, dass sich alle vier Grundrechenarten mit rationalen Zahlen in der Menge $\mathbb{Q}$ ausführen lassen, ein Novum im bisherigen Lernprozess. Dieser Umstand kann anhand von abwechslungsreichen Aufgaben geübt und gefestigt werden.

Ein Unterabschnitt zum sinnvollen Einsatz des Taschenrechners komplettiert den Überblick über die Eigenschaften und Regeln im Umgang mit rationalen Zahlen. Wesentlich erscheinen hierbei die Tipps zum zweckmäßigen Gebrauch eines Taschenrechners, die auf Vor- und Nachteile der Verwendung desselben hinweisen. Aufgaben, in denen genau dies erprobt und erfahren werden kann, folgen in diversen Aufgabenformaten.

3 Potenzen

Die Erfahrung lehrt, dass die Darstellung eines Produkts mit gleichen Faktoren als Potenz bei Schülerinnen und Schülern eine Herausforderung darstellt, da die scheinbare Ähnlichkeit mit der Multiplikation so groß wirkt, dass mit der Angabe 2^3 zuerst das Ergebnis 6 statt korrekterweise 8 oder mit 9^2 eben 18 statt korrekterweise 81 assoziiert wird. Dem wird gleich zu Beginn des Kapitels versucht entgegenzuwirken, indem in Aufgabe 3.01 das „Mit-sich-selbst-Multiplizieren“ bzw. die Anzahl der Faktoren im Vordergrund steht. Nach der Definition einer Potenz wird in den folgenden Aufgaben genau auf dieses Kriterium Bedacht genommen. Der Vorteil einer vereinfachten Darstellung wird dabei immer wieder bewusst hervorgehoben. Zudem wird auf die korrekte Eingabe von Basis und Exponent – vor allem bei negativer Basis – in den Taschenrechner hingewiesen.

Im Abschnitt „Mit Potenzen rechnen“ wird vor allem auf exakte Definitionen der Rechenregeln geachtet. Die häufig gehörte Merkregel „Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert“ würde bei genauerer Betrachtung zu folgender falscher Regel führen: „$a^m \cdot a^n = m + n$“. Daher wird hier die korrekte Beschreibung „... indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert“ angeführt. Die zu Beginn des Abschnitts vorgestellten Musteraufgaben führen wie selbstverständlich zu den Rechenregeln im Umgang mit Potenzen, die gleiche Basis aufweisen. Vielfältige Aufgaben zum Festigen des Gelernten folgen. Auch bei Potenzen mit gleichem Exponenten und beim Potenzieren von Potenzen wird auf eine präzise Definition der Rechenregeln Wert gelegt. Die Vorrangregeln werden neuerlich erwähnt, da sie nun um den Vorgang des Potenzierens erweitert werden müssen, welcher sich vor die Punktrechnungen setzt.

Einen wesentlichen Sachverhalt stellt die Präsentation der Zehnerpotenzen dar, welche in vielen Bereichen der Naturwissenschaft die Bezeichnungen (meist ab Trillion) ersetzen; die vor allem in der Informatik üblichen Vorsilben und deren Abkürzungen werden überdies angeführt. In diesem Zusammenhang wird die Gleitkommadarstellung detailliert erklärt und in diversen Aufgaben aus den Bereichen Astronomie, Physik und Biologie reflektiert.

Als Umkehrung des Quadrierens wird – als Vorbereitung im Umgang mit dem pythagoräischen Lehrsatz – bereits in diesem Kapitel kurz die Quadratwurzel einer Zahl definiert. Anhand grundlegender Aufgaben vor allem mit dem Taschenrechner und einfacher Rechenregeln können Schülerinnen und Schüler einen ersten Einblick in das Radizieren erlangen. Die Problematik, dass hier bereits Zahlen als Ergebnisse erzielt werden, die außerhalb der Menge $\mathbb{Q}$ stehen, kann erwähnt, muss aber nicht ausgiebig reflektiert werden. Der Lehrplan sieht die Einführung der reellen Zahlen und die intensive Beschäftigung mit den Elementen der Menge $\mathbb{R}$ erst in der achten Schulstufe vor.

4 Mit Termen und Formeln arbeiten

Einen wesentlichen Bereich des Mathematikunterrichts in der siebenten Schulstufe nimmt die Beschäftigung mit Termen und Formeln ein. Während in der fünften Schulstufe begonnen wird, Variablen zu definieren, einfache Terme aufzustellen sowie einfache Gleichungen zu lösen und in der sechsten Schulstufe diese Kenntnisse wiederholt, gefestigt und vertieft werden, wird nun ein Regelwerk erarbeitet, mit dem Aufgaben in diversen Anwendungsbereichen gelöst werden können.

Die Einstiegsaufgabe 4.01 ruft den grundlegenden Aspekt in Erinnerung, mit Variablen in Termen unbekannte Zahlen darzustellen. Die weiteren Musteraufgaben wiederholen und vertiefen diese bereits in den vergangenen Schulstufen entwickelte Grundvorstellung. In den Definitionen werden die Schritte von der Variablen zum Term, vom Term zu Gleichungen und von Gleichungen zu Formeln zusammengefasst. Viele Aufgaben, die je nach Bedarf und Handlungsbereich eingesetzt werden können, festigen diese Kenntnisse in diversen Formaten.

Im folgenden Abschnitt „Terme addieren und subtrahieren“ kommen neben der bereits bekannten Möglichkeit des verkürzten Darstellens von Termen wesentliche Begriffe ins Spiel, die essentiell für die weitere Beschäftigung mit diesem Themenbereich sind: eingliedrige Terme (Monome), mehrgliedrige Terme (Polynome) und der Begriff des Koeffizienten. Erst hierbei wird den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit erläutert, in bestimmten Fällen den Malpunkt wegzulassen. Dies ist für viele Lernende ein herausfordernder Lernprozess, der behutsam und mit dem ständigen Hinweisen darauf erfolgen muss, dass Ausdrücke wie 5a oder 12x weiterhin eine Multiplikation darstellen; allein der besseren Übersicht wegen werde dies in Hinkunft eine Erleichterung beim Anschreiben von Termen sein – der Malpunkt sei überdies nicht auf einmal verboten.
Um das Terrain nicht gänzlich neu zu besiedeln, werden bekannte Gesetze (Kommutativ- und Assoziativgesetz) sowie die Klammernauflösungsregeln, welche für konkrete Zahlen und für beliebige Terme gelten, angeführt. Es sei darauf hingewiesen, dass in diesem Lehrwerk bei Regeln für Terme Großbuchstaben verwendet werden; dies soll den Überblick über die strukturelle Beschaffenheit von Termen – auch im Hinblick auf weitere Abschnitte und Kapitel – vereinfachen. Vielfältige Aufgaben zum Einüben der neuen Schreibweise im Umgang mit bekannten Regeln und Gesetzen folgen.

Bei den Musteraufgaben für das Multiplizieren von Termen finden sich in fast allen Fällen geometrische Darstellungen zur besseren Veranschaulichung und zum sorgfältigen Nachvollziehen des Sachverhalts. Dies ermöglicht eine konkrete Perspektive auf ein sonst abstraktes algebraisches Vorgehen. Auch hier werden Kommutativ- und Assoziativgesetz angeführt, welche die Grundlage für das multiplikative Operieren mit Monomen sind. Erst nach dem intensiven Beschäftigen mit eingliedrigen Termen wird das System auf mehrgliedrige Terme ausgeweitet, was das Heranziehen der Distributivgesetze erfordert, die aber für konkrete Zahlen schon seit der fünften Schulstufe bekannt sind. Auch hier werden in den Musteraufgaben geometrische Veranschaulichungen eingefügt. Das Multiplizieren von ausschließlich mehrgliedrigen Termen und die Regeln dafür sind der Abschluss dieses Abschnitts, der nun die Voraussetzungen für das Beschäftigen mit den binomischen Formeln geschaffen hat.

Im Abschnitt zu den binomischen Formeln finden sich bei den Musteraufgaben ebenso wieder geometrische Veranschaulichungen; die Terme in den Formeln selbst sind analog zum vorangegangenen Abschnitt wieder in Großbuchstaben gehalten: Es ist ja schließlich nicht nur möglich, Terme wie $(x + 2)$ oder $(5 - h)$ zu quadrieren, was die Schreibweise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ bzw. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ gerechtfertigt hätte, sondern auch Terme wie $(3y^2 + 5z)$; da es bei $3y^2$ bzw. bei $5z$ jeweils um Produkte handelt und nicht um konkrete Zahlen oder einzelne Variablen, erscheint eine Formel wie $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ mehr als adäquat, in der A und B für Terme jeder Art stehen können. Vielfältige Aufgaben zum Darstellen und Operieren, aber auch zum Interpretieren und Argumentieren ermöglichen eine intensive Auseinandersetzung mit den binomischen Formeln und deren Darstellungsmöglichkeiten.

Der folgende Abschnitt hat Bruchterme und Termstrukturen zum Thema. Es muss Schülerinnen und Schülern verdeutlicht werden, dass man erst dann von einem Bruchterm sprechen kann, wenn es sich um einen Term in Bruchdarstellung handelt und dabei mindestens eine Variable im Nenner steht. Dies wird in den Musteraufgaben erläutert und in weiteren Aufgaben erarbeitet. Ebenso sollte den Lernenden bewusst werden, dass ein Bruchterm manche Werte nicht annehmen darf, da ansonsten der Nenner 0 und somit der Ausdruck nicht zielführend wäre. Daran schließt ein wichtiger Unterabschnitt zu Termstrukturen an, der bereits in der siebenten Schulstufe ein Bewusstsein schaffen soll, welcher Grob- und Feinstruktur Terme unterliegen können. Diese Schulung der Sichtweise auf Terme ist zentral für das Umformen von Gleichungen und wird hier entsprechend geübt und konsolidiert.

Genau auf diese Strukturelemente von Termen geht der einführende Theorieteil im nächsten Lernabschnitt „Gleichungen und Formeln umformen“ ein. Die bereits bekannten Elementarumformungsregeln werden hier für beliebige Terme angeführt und anhand von Aufgaben eingeübt. Ein gesonderter Unterabschnitt beschäftigt sich mit dem Begründen von Umformungen. Dieser gewährt in der Musteraufgabe und den anschließenden Übungsaufgaben auf geometrische Belange übertragen ganz konkrete Einblicke in die Folgen des Umformens von Gleichungen. Eine solche Sichtweise kann helfen, die notwendigen Entscheidungen bei konkreten Anwendungsaufgaben schnell und zielgerichtet zu treffen.

Der letzte Lernabschnitt „Textaufgaben" bietet eine detaillierte Erläuterung den Begriff Äquivalenzumformungen betreffend und schließt in den Aufgaben alle Kenntnisse und Erfahrungen aus den vorangegangenen Abschnitten in den Lernprozess mit ein.

5 Lineare Wachstums- und Abnahmemodelle

Direkte und indirekte Proportionalität sind bereits in den vorangegangenen Schulstufen behandelt worden. Darauf aufbauend stellt dieses Kapitel anhand von anschaulichen und praxisbezogenen Aufgaben eine entscheidende Überleitung zur Funktionenlehre der achten Schulstufe dar. In den Einführungsaufgaben steht der Darstellungswechsel von Tabelle zu Liniendiagramm oder umgekehrt im Mittelpunkt. Daran wird das Wesen des linearen Wachsens erarbeitet, was dann zur entsprechenden Definition führt. Auf ähnliche Art nähert man sich dem linearen Abnehmen. In beiden Fällen soll anhand von sorgfältig ausgesuchten Aufgaben die Bedeutung der beiden Modelle erkannt und Grundvorstellungen entwickelt werden, die sich in weiterer Folge in den speziellen anwendungsorientierten Bereichen entfalten können. Wesentlich dabei ist das Erkennen eines stets gleichartigen Modells, das auf verschiedene Arten gedeutet werden kann.

Im linearen Zeit-Ort-Modell spiegelt sich die erste Anwendung anschaulich wider. Dabei ist explizit darauf zu verweisen, dass nicht von einem Zeit-Weg-Modell, sondern vom Zeit-Ort-Modell die Rede ist, bei dem die der Zeit zugeordnete Größe die Entfernung von einem Ausgangspunkt darstellt. Dieser Unterschied ist beim linearen Modell zwar nicht so bedeutsam wie bei quadratischen oder anderen Modellen, da dort nach einer gewissen Anzahl von Zeiteinheiten die zugeordnete Größe wieder 0 sein kann, man also wieder am Ausgangspunkt angelangt ist, man aber trotzdem eine gewisse Wegstrecke zurückgelegt hat, aber es ist dennoch für die Lernenden unverzichtbar, von Anfang an eine korrekte Vorstellung hierzu zu entwickeln.

Ähnlich zu diesem Modell werden das lineare Kostenmodell und das lineare Gebührenmodell entwickelt. In beiden Fällen liegt der relevante Gesichtspunkt beim Interpretieren der Größen in den einzelnen genannten Formeln und beim Erkennen von Analogien innerhalb der einzelnen Modelle.

Gemäß den Vorgaben des Lehrplans beschränkt sich der weitere Verlauf des Kapitels lediglich auf das lineare Zinsenmodell. Hierbei werden die wichtigsten Begriffe (Kapital, Zinsen, Zinssatz, Kapitalertragssteuer, effektive Zinsen bzw. effektiver Zinssatz) anhand der einfachen Verzinsung erarbeitet.

Der letzte Lernabschnitt geht knapp auf die Frage ein, wie es mit Wachstums- und Abnahmeprozessen aussieht, die nicht linear sind. Daran knüpft auch die Sonderseite MERKwürdiges an, die eine Beschäftigung mit Zinseszinsen und Krediten anregt, also mit Themengebieten, die außerhalb des Lehrplans der siebenten Schulstufe stehen.

6 Die vier Quadranten des Koordinatensystems

Die Kenntnis rationaler Zahlen vorausgesetzt, kann nun auch das kartesische Koordinatensystem um den 2., 3. und 4. Quadranten erweitert werden. Die Einführungsaufgaben stellen einerseits eine Vernetzung zur Geografie her und appellieren andererseits an den gesunden Menschenverstand der Schülerinnen und Schüler beim Vervollständigen eines Rechtecks in einem Koordinatensystem, bei dem sich ein Eckpunkt offensichtlich außerhalb des bislang bekannten Bereichs eines Koordinatengitters befindet. Alle weiteren Erklärungen und Definitionen schließen die nun selbst gemachten Erfahrungen der Lernenden mit ein und können in den folgenden Aufgaben in unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen erarbeitet und gefestigt werden.

Der Abschnitt 6.2 stellt vier Musteraufgaben an den Anfang, anhand derer detailliert gezeigt werden soll, dass die Koordinaten von Figuren allein, deren relevante Größen achsenparallel liegen, auch dazu dienen können, Berechnungen von Umfang oder Flächeninhalt durchzuführen. Diese Herangehensweise festigt einerseits die Handhabung positiver und negativer Zahlen vor allem im Hinblick auf die Darstellung auf einer Zahlengeraden und andererseits wird hiermit ein subtiler Vorbote auf die Bedeutung von Zahlenpaaren im Sinn von Vektoren ins Spiel gebracht (siehe auch Aufgabe 6.37). Anhand einiger Aufgaben auf unterschiedlichen Handlungsbereichen kann somit das Verständnis im Umgang mit Koordinaten in allen vier Quadranten gestärkt werden.

7 Figuren vergrößern und verkleinern

Der Kongruenzbegriff ist den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt, er wird jedoch in der Musteraufgabe 7.01 bewusst (noch) nicht verwendet, da hier mit dem Alltagswissen der Lernenden eine Situation reflektiert werden soll, mit der sie in der Regel ohne Schwierigkeiten umgehen können. Darauf aufbauend werden nun die Begriffe Ähnlichkeit und Kongruenz erläutert, wobei die Kongruenz als Sonderfall der Ähnlichkeit explizit Erwähnung findet, dessen sich die Lernenden auch gewahr werden sollen. Die folgenden Aufgaben gehen genau auf dieses Erkennen und Unterscheiden ein.

Hat man sich in der fünften Schulstufe mit dem Maßstab auseinandergesetzt, so wird man im nächsten Abschnitt bezüglich des Begriffs Verhältnis zweier Größen abermals mit einer analogen Situation konfrontiert, dass eine Länge mit einer Maßstabszahl, hier Verhältniszahl genannt, multipliziert werden kann; werden dabei alle Längen einer Figur mit dieser Verhältniszahl multipliziert, entsteht eben eine ähnliche Figur. Wichtig hierbei ist jedoch die ausführliche Erarbeitung der Darstellungsmöglichkeiten als Quotient, als Division oder als Bruch. All diese Varianten sowie die Möglichkeit der Überführung von einer in eine andere Darstellung sollen in den folgenden Aufgaben erprobt und geübt werden. Wenn dann einsichtig ist, was man unter einem Verhältnis zweier Größen versteht, so kann damit eine Verhältnisgleichung aufgestellt werden, die auch Proportion genannt wird. Auch hier sind weitere Darstellungsmöglichkeiten als Bruchgleichung bzw. als Produktgleichung angegeben. Dies stellt eine Verbindung zum Abschnitt „Verhältnisse angeben“ in Mathematik verstehen 2, Seite 64, her, wo bereits die Begriffe Verhältnisgleichung und Bruchgleichung thematisiert worden sind. Auch hier folgen Aufgaben, welche alle Handlungsbereiche ansprechen.

Im Abschnitt 7.3 werden nun Verhältnisse und Verhältnisgleichungen mit geometrischen Figuren in Verbindung gebracht. Die Musteraufgabe 7.28 verdeutlicht diese Beziehung ausführlich und veranschaulicht anhand ähnlicher Dreiecke, wie sich die Verdopplung aller Seitenlängen auf die vergrößerten Figuren auswirkt. Dies wird erläutert und in den Ähnlichkeitssätzen für Dreiecke zusammengefasst. In den Aufgaben hierzu wird nicht nur das Erkennen und Konstruieren von ähnlichen Dreiecken geübt, sondern auch das Argumentieren und Interpretieren anhand gegebener Abbildungen oder angeführter Aussagen. Erweitert wird der Themenbereich durch Sätze und Aufgaben zur Ähnlichkeit bei Vierecken und Vielecken.

Beim proportionalen Vergrößern und Verkleinern liegt das Hauptaugenmerk bei den verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten des Streckungsfaktors und der Interpretation desselben, dh. inwieweit sich eine Figur verändern lässt, wenn der Streckungsfaktor k größer 1, gleich 1 oder zwischen 0 und 1 liegt. Auch das Konstruieren von Figuren soll hier verstärkt praktiziert werden. Der Unterabschnitt zur zentrischen Streckung ergänzt die Sichtweise auf mögliche Konstruktionsanordnungen.

In diesem Lehrwerk werden der Vollständigkeit halber alle drei Strahlensätze erläutert, einerseits anhand von Abbildungen, die das eigenständige Erarbeiten im Unterricht fördern, andererseits durch mehrere Möglichkeiten des Anschreibens als Verhältnisgleichungen oder als Bruchgleichungen. Wichtig erscheint hier, dass nicht nur in den Abbildungen 7.1 und 7.2, sondern vor allem in der Abbildung 7.3 ähnliche Dreiecke gefunden, markiert und eventuell herausgezeichnet werden sollen, damit die Verbindung der Strahlensätze zur Ähnlichkeit deutlich vor Augen geführt werden kann. Alle Aufgaben, die sich an den Theorieteil anschließen, beleuchten das Thema auf vielfältige Art und Weise und bieten somit ein reichhaltiges Spektrum des verständigen Erkennens geometischer und proportionaler Zusammenhänge. Für Interessierte wird auf der Sonderseite MERKwürdiges der goldene Schnitt erörtert.

8 Der pythagoräische Lehrsatz

Fast durchgehend ist in diesem Lehrwerk vom „pythagoräischen Lehrsatz“ die Rede und nicht in der gängigen Bezeichnung vom „Satz des Pythagoras“ (mit Ausnahme des Theoriekastens auf Seite 181), da dieser Lehrsatz von den Schülern des Pythagoras, den Pythagoräern, bewiesen worden ist und nicht von Pythagoras selbst, der den Lehrsatz vermutlich nicht einmal entworfen, sondern nur von den Ägyptern und Babyloniern weiterentwickelt hat. Darauf wird im Lehrbuch hingewiesen.

In der Einstiegsaufgabe und auch in den weiteren Aufgaben, in denen sich die Schülerinnen und Schüler erstmals mit dem Lehrsatz befassen sollen, liegt der Ansatz für das Erkennen der Richtigkeit im Überprüfen der Flächeninhalte der beteiligten rechtwinkeligen Dreiecke und Quadrate. Hier wird der pythagoräische Lehrsatz vom Begriff des Flächeninhalts ausgehend eingeführt. Zudem liegen für Aufgabe 8.01 im Anhang des Schulbuchs die abgebildeten Dreiecke und Quadrate zum Ausschneiden vor, damit den Lernenden die Möglichkeit gegeben werden kann, sich selbst durch angeleitetes Zusammensetzen der Figuren von der Übereinstimmung der entsprechenden Flächeninhalte zu überzeugen. Der Vorteil dieser Herangehensweise liegt darin begründet, dass die eigentliche Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes als kein Zauberwerk willkürlich gewählter Quadratzahlen in einer eingängigen Formel vereint aufgefasst wird, sondern im Vorfeld von den Lernenden als nachvollziehbares Bilden von kongruenten Flächen erfahren worden ist.
Die Schülerinnen und Schüler sollen in der Lage sein, den pythagoräischen Lehrsatz in eigenen Worten ohne die Nennung von Variablen für die Seitenlängen formulieren zu können. Dabei ist es wichtig, dass die Begriffe „Kathetenlängenquadrate" und „Hypotenusenlängenquadrat" etabliert werden. Der Vorteil liegt auf der Hand, da nicht in jedem Dreieck die Seitenlängen mit a, b und c bezeichnet sein müssen. Für eine allgemeine Merkformel ist dies jedoch selbstverständlich legitim.
Ein weiterer wesentlicher Aspekt bei der Einführung des Lehrsatzes ist dessen Umkehrung: Gilt in einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c eine Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist dieses Dreieck rechtwinkelig. Diese Erkenntnis ist der Grundbaustein vieler diesbezüglicher Anwendungsaufgaben (siehe etwa Aufgabe 8.44).

Im folgenden Abschnitt wird die Kenntnis der Übereinstimmung der Summe der beiden Kathetenlängenquadrate mit dem Hypotenusenlängenquadrat im gewohnten Sinn genutzt, indem anhand von Musteraufgaben vorgeführt wird, wie eine fehlende Seitenlänge in einem rechtwinkeligen Dreieck berechnet werden kann. Ein essentieller Punkt hierbei sind die Hinweise darauf, dass Streckenlängen stets positive Zahlen sein müssen bzw. dass das Wurzelsymbol eindeutig ist, was andernfalls bei den konkreten Berechnungen zu Missdeutungen führen würde. Wie schon im Kommentar zu Kapitel 3 erwähnt, kann aus lehrplantechnischen Gründen im Band 3 noch nicht näher auf die Zahlbereichserweiterung durch das Einführen der Quadratwurzel eingegangen werden.
Die folgenden Aufgaben bieten eine große Bandbreite von Konstruktionsformaten über Anwendungen im Alltag bis hin zu Aufgaben, die in erster Linie die Handlungsbereiche Interpretieren und Argumentieren abdecken.
Der Unterabschnitt „Steigung und Gefälle" stellt eine anwendungsorientierte Erweiterung im Zusammenhang mit dem pythagoräischen Lehrsatz dar. Hier werden einerseits Situationen aus dem Alltag schülergerecht erarbeitet, andererseits findet das Winkelmaß eine nachvollziehbare Vernetzung mit den Gegebenheiten im Umgang mit rechtwinkeligen Dreiecken. Die Aufgaben stellen einen wesentlichen Beitrag zur Orientierung bei Herausforderungen in der Alltagswelt dar.

Der letzte Lernabschnitt in diesem Kapitel soll anhand dreier Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes den interessierten Schülerinnen und Schülern vor Augen führen, welche Ideen sich Personen vor vielen hundert Jahren gemacht haben, um die Richtigkeit eines mathematischen Satzes nachzuweisen. Gerade der Beweis nach Thabit ibn Qurra ist leicht nachzuvollziehen und lässt es zu, dass ohne die Kenntnis anderer Gesetzmäßigkeiten die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ erkannt werden kann. Beim Beweis nach Fibonacci kann die Ähnlichkeit von Dreiecken wiederholt und angewendet werden, der Beweis nach Leonardo da Vinci hat die Flächeninhaltsgleichheit von Vielecken als Grundlage. Den Beweis nach Perigal-Dudeney hingegen (Aufgabe 8.58) können die Schülerinnen und Schüler durch Ausschneiden der entsprechenden Figuren im Anhang des Schulbuchs selbst entdecken.

Als zusätzliche Erweiterung bietet der Abschnitt MERKwürdiges Informationen zu pythagoräischen Zahlentripeln und zum großen Satz von Fermat, der erst vor wenigen Jahren von dem britischen Mathematiker Andrew Wiles nach jahrelanger Arbeit bewiesen worden ist.

9 Flächeninhalte ebener Figuren

Am Beginn des Kapitels steht eine Einstiegsaufgabe, die den Lernenden die Möglichkeit bietet, sich auf spielerische Art mit den bereits bekannten unterschiedlichen geometrischen Figuren und Bezeichnungen zu sowie mit deren Eigenschaften zu befassen. Vor allem der Handlungsbereich Interpretieren spielt in diesem Einführungsabschnitt eine gewichtige Rolle, da hiermit die Sichtweise auf Charakteristika geometrischer Figuren geschärft wird, was in weiterer Folge für Ideen zu Flächeninhaltsberechungen von großem Nutzen ist.

Der Abschnitt 9.2 widmet sich der Erarbeitung des Flächeninhalts von Dreiecken. Ausgehend von der bereits bekannten Formel für den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks wird anhand detailliert ausgeführter Musteraufgaben der Flächeninhalt eines spitzwinkeligen und eines stumpfwinkeligen Dreiecks hergeleitet, was in einer allgemeinen Formel für den Flächeninhalt beliebiger Dreiecke gipfelt. Die Bemerkung, dass diese allgemeine Formel auch für rechtwinkelige Dreiecke gilt, ist wesentlich für weitere Anwendungen. In den folgenden Aufgaben werden viele Handlungsbereiche abgerufen, weiters sind Konstruktionen im kartesischen Koordinatensystem wieder gefragt.

Auf ähnliche Weise werden im folgenden Abschnitt die Flächeninhalte von Parallelogramm und Rhombus entwickelt. Bei der Herleitung des Flächeninhalt eines Rhombus soll auf die verfügbare Online-Ergänzung hingewiesen werden, in der eine Analogie zur Herleitung des Flächeninhalts eines Deltoids präsentiert wird, die äußerst förderlich für das Verständnis des Zusammensetzens von Teilfiguren ist, die in vielen Anwendungen notwendig scheint. Die Aufgaben in diesem Abschnitt decken wiederum alle Handlungsbereiche in vollem Umfang ab.

Bei der Herleitung einer Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes wird nicht nur auf das Zerlegen in ein Rechteck und zwei rechtwinkelige Dreiecke bzw. auf das Anfügen eines um 180° gedrehten kongruenten Trapezes gesetzt, sondern in selbst zu bearbeitenden Aufgaben auch auf das Zerlegen in zwei Dreiecke (Aufgabe 9.87) und das Umformen des Trapezes in ein Rechteck (Aufgabe 9.89).

Der Flächeninhalt eines Deltoids wird in einer Musteraufgabe zunächst durch Zerlegen in zwei gleichschenkelige Dreiecke ermittelt. Dass eine Figur, deren Diagonalen normal zueinander stehen, auch durch Abtrennen, Verschieben und Anfügen zweier rechtwinkeliger Dreiecke in ein Rechteck übergeführt werden kann, ist bereits beim Rhombus thematisiert worden. Hier ist diese Umformung aufgrund der abgedruckten Abbildungen klar ersichtlich. Dies führt wie auch beim Rhombus zu einem Flächeninhalt, der sich aus dem halben Produkt der beiden Diagonalenlängen ergibt. Diese Analogie bezüglich der normal zueinander stehenden Diagonalen sollte bewusst angesprochen werden, da sie auch für den folgenden Abschnitt von Bedeutung ist.

Bei der Berechnung des Flächeninhalts von allgemeinen Vierecken kann die Tatsache, dass die beiden Diagonalen normal zueinander stehen, eine Erleichterung darstellen. Dies wird in mehreren Aufgaben zum Thema gemacht. Auch das Umschreiben eines Rechtecks und das anschließende Abziehen von Flächeninhalten rechtwinkeliger Dreiecke weden in einer Musteraufgabe vorgeführt. Bei Vielecken soll der Flächeninhalt durch sorgsames Zerteilen in Figuren ermittelt werden, deren Flächeninhalte sich leicht berechnen lassen (siehe auch Aufgabe 9.120 im folgenden Abschnitt).

Im letzten Lernabschnitt dieses Kapitels werden die erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten im Umgang mit der Flächeninhaltsberechnung bei ebenen Figuren anhand vermischter Aufgaben gefestigt. Eine Überblicksaufgabe am Beginn des Abschnitts dient gleichsam als einleitende Zusammenfassung, die Grundlage für die weiteren Aufgaben aus allen Handlungsbereichen darstellt.

10 Prisma und Pyramide

Anknüpfend an die Kenntnisse über das Prisma aus der vorangegangenen Schulstufe bietet der Abschnitt über die Eigenschaften von Prismen zunächst die Möglichkeit der Wiederholung von bereits Gelerntem. Die Einstiegsaufgabe fördert einerseits die Raumvorstellungen, andererseits die Verbindung zwischen den Darstellungen von Körpern als Schrägrisse bzw. als Netze. Nachdem die wichtigsten Eigenschaften von Prismen zusammengefasst worden sind, werden diese in den folgenden Aufgaben auf mannigfache Weise eingeübt und vertieft.

Im Abschnitt über Netze und Schrägrisse von Prismen steht eine detailliert ausgearbeitete Musteraufgabe am Beginn, anhand derer sowohl die Konstruktion des Netzes als auch jene des Schrägrisses jeweils Schritt für Schritt erläutert wird. In den folgenden Aufgaben werden das Erkennen von Körperstrukturen und das räumliche Vorstellungsvermögen geschult. Konstruktionen aller Arten stehen im Vordergrund, bevor den Berechnungen am Prisma das Hauptaugenmerk geschenkt wird.

Am Beginn des Abschnitts über Volumen, Masse und Oberflächeninhalt von Prismen werden in einer Einstiegsaufgabe die wesentlichen Aspekte des Rauminhalts wiederholt und reflektiert. In einer Musteraufgabe wird abermals schrittweise erläutert und vorgerechnet, wie das Volumen eines Prismas zu ermitteln ist, bevor die Formel für das Volumen für gerade und für schiefe Prismen angeführt wird. Dazu folgen zahlreiche anwendungsorientierte Aufgaben, in denen nicht nur das Berechnen im Vordergrund steht, sondern auch das Ablesen von Informationen aus Abbildungen mit Maßangaben. Im nächsten Unterabschnitt wird die Dichte eines Körpers als Masse pro Volumen eingeführt. Der Einstieg gestaltet sich hier nicht in Form von Berechnungen, sondern mithilfe einer landläufigen Vorstellung, die in einer Musteraufgabe hinterfragt, erweitert und erläutert wird. Berechnungen und Erklärungen zu den verwendeten Einheiten kommen danach. Weitere Musteraufgaben folgen, die den Schülerinnen und Schülern ermöglichen sollen, vorgeführte Berechnungen einsehen zu können, bevor oder während sie diese selbst bearbeiten. Für die Berechnung des Oberflächeninhalts eines Prismas wird wiederum auf das Netz eines Prismas zurückgegriffen, anhand dessen in einer Musteraufgabe ausführliche Erklärungen zur Berechnung geboten werden. Formeln für den Oberflächeninhalt und den Mantelflächeninhalt folgen gesondert danach. Auch in diesem Unterabschnitt finden sich Aufgaben zu allen Handlungsbereichen.

Die Pyramide wird als neuer geometrischer Körper zunächst so eingeführt, dass verschiedene geometrische Körper zu unterscheiden sind und danach anhand verschiedenartiger Pyramiden Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausgearbeitet werden sollen. Erst dann werden diese in einem Theoriekasten zusammengeführt. In den folgenden Aufgaben werden keine Berechnungen durchgeführt, sondern ausschließlich die Eigenschaften von Pyramiden eingeübt und gefestigt. Auch im Abschnitt zu Netzen und Schrägrissen von Pyramiden wird zunächst dem Erkennen von möglichen Netzen Raum gegeben, bevor Konstruktionen in einer Musteraufgabe vorgeführt werden. Auch die Konstruktion eines Schrägrisses einer Pyramide wird in Musteraufgaben präsentiert und kann anhand einzelner Aufgaben geübt werden.

Das Volumen einer Pyramide lässt sich auf mannigfaltige Arten erklären und veranschaulichen. In diesem Lehrwerk wird von dem Spezialfall ausgegangen, dass ein Würfel aus sechs volumsgleichen Pyramiden bestehen könnte, deren Spitzen im Schnittpunkt aller Würfeldiagonalen zusammenfallen. Dass von einem Sonderfall auf eine allgemeine Formel für das Volumen einer Pyramide geschlossen werden kann, liegt darin begründet, dass aus dem Spezialfall ohne Beschränkung der Allgemeinheit hervorgeht, dass ein Pyramidenvolumen stets der dritte Teil des Volumens eines Prismas mit gleichem Grundflächeninhalt und gleicher Höhe ist. Dies wird auch in der Formel im Theoriekasten festgehalten. In den Aufgaben wird auch das Volumen eines Pyramidenstumpfs thematisiert. Eine gesonderte theoretische Beschäftigung mit diesem geometrischen Körper scheint nicht notwendig, da mithilfe der Formel für das Volumen einer Pyramide das Auslangen – auch für jene Körper in Aufgabe 10.110 – gefunden werden kann. Auch für Pyramiden werden Aufgaben zu Masse und Dichte zur Verfügung gestellt. Ein ausführlicher Theorieteil kann unterbleiben, da dieser Aspekt bereits im Abschnitt 10.3 für Prismen behandelt worden ist. Der Oberflächeninhalt einer Pyramide wird anhand einer allgemeinen Musteraufgabe eingeführt, was zur Formel im Theoriekasten führt. Aufgaben zu Tetraeder und Oktaeder sind vorhanden, eine gesonderte Beschäftigung mit diesen beiden platonischen Körpern erscheint müßig, da mit der Kenntnis der Berechnungsmethoden für Volumen und Oberflächeninhalt von Pyramiden das Auslangen auch für diese Körper gefunden werden kann.

Allgemein ist festzuhalten, dass sowohl für Prismen als auch für Pyramiden der Grundflächeninhalt in den Formeln stets mit G angegeben wird, dh. die Form der Grundfläche entscheidet bei jeder Berechnung über die Maßzahl des Grundflächeninhalts. Es wäre nicht zweckmäßig, für Prismen und Pyramiden mit unterschiedlichen Grundflächen diesbezüglich jeweils eine andere Formel anzuführen.

11 Merkmale

Im Kapitel „Merkmale" werden anhand von bereits bekannten tabellarischen und grafischen Darstellungsformen in der Einstiegsaufgabe Daten erhoben und analysiert, die sich leicht beschaffen lassen bzw. die leicht zu unterscheiden sind. Daher steht danach gleich eine wichtige Gliederung in drei Kategorien bei der Beschäftigung mit Merkmalen auf dem Programm. Hierbei ist es wesentlich zu erkennen, zwischen Merkmalen und Merkmalsausprägungen unterscheiden zu können. Weitere Musteraufgaben widmen sich wichtigen Kennzahlen, die in der Folge ebenso eine Bedeutung haben werden. Letztlich handelt es sich dabei um Wiederholungen, die jedoch in einem neuen Umfeld eingebettet einen anderen Stellenwert einnehmen. In den zugehörigen Aufgaben kann über die Arten von Merkmalen und deren Ausprägungen reflektiert werden.

Im folgenden Abschnitt zu Klassen in der beschreibenden Statistik wird auf die Vorteile solcher Einteilungen eingegangen und der sinnvolle Umgang damit geübt. In einer Musteraufgabe wird gründlich dargelegt, wie solche Einteilungen erfolgen und wie daraus Informationen abgelesen werden können. In den weiteren Aufgaben wird in unterschiedlichen Kontexten diese Einteilung geübt. Stängel-Blatt-Diagramme werden als weitere Möglichkeit vorgestellt, Klasseneinteilungen zu treffen.

Das Erstellen und Interpretieren von Vierfeldertafeln (Kontingenztafeln) wird im folgenden Abschnitt anhand von Musteraufgaben eingeführt. Den Schülerinnen und Schüler soll verdeutlicht werden, dass mit wenig Aufwand eine übersichtliche Datenstruktur aufgebaut werden kann, mithilfe derer wertvolle Informationen zu entnehmen sind. Aufgaben aus diversen alltäglichen Bereichen sollen dazu dienen, die Welt der Lernenden hiermit sinnvoll zu erschließen.

Der letzte Lernabschnitt dient dem Vergleich von Merkmalen. Anhand zweier Musteraufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen mit der Evaluation von Datenmengen machen und lernen zu erkennen, welche Zusammenhänge sich aufgrund einer bestimmten Erhebung ergeben können.

Ein Ausblick in Richtung achte Schulstufe auf der Sonderseite MERKwürdiges bezüglich Streudiagrammen und Passgeraden stellt vor den beiden Wiederholungsseiten den Abschluss des Kapitels dar.