

Mathematik verstehen für die Sekundarstufe I

Ein Lehrwerk für die AHS-Unterstufe und die Neue Mittelschule sollte auf **gut durchdachten methodisch-didaktischen Grundlagen** basieren, einen **abwechslungsreichen Unterricht** mit einer **Vielfalt an Aufgaben** ermöglichen und letztlich für Schülerinnen und Schüler **verständlich formuliert** sein. Diesen Grundsätzen fühlen sich die Autorinnen und Autoren des Lehrwerks „Mathematik verstehen“ verpflichtet.

Der **Lehrplan** aus dem Jahr 2000 als gesetzlich verbindliche Grundlage (BGBl. II Nr. 133/2000) sowie die 2008 im Nationalrat beschlossenen und 2009 in Kraft getretenen **Bildungsstandards** sind das Fundament, auf dem ein zeitgerechtes Lehrwerk aufbauen muss. Darüber hinaus bietet das Lehrwerk „Mathematik verstehen“ sowohl für Lehrende als auch für Lernende ein Konzept, das verständlich, altersgerecht und mathematisch exakt alle Vorgaben erfüllt, die von einem modernen Lehrbuch erwartet werden.

1 Ziele des Lehrwerks

1.1 Heranführen an die Mathematik nach dem genetischen Prinzip

Das genetische Prinzip des Unterrichts sieht den Erwerb von Wissen durch **individuelles Reflektieren** sowie das **Dialogische** im Vordergrund. Die Lernenden werden eingangs nicht mit Faktenwissen konfrontiert, sondern in **Situationen aus ihrer Erlebniswelt** hineinversetzt, in denen sich Fragen ergeben, die im Miteinander beantwortet bzw. kritisch beleuchtet werden können. Die erlebte Wirklichkeit der Lernenden wird dadurch mit dem Lehrstoff so zusammengeführt, dass sich Veranschaulichungen und damit mathematische Grundvorstellungen wie von selbst ergeben.

Das Lehrwerk „Mathematik verstehen“ bereitet diesen Ansatz vor allem durch **Kapiteleinstiege** mit Aufgaben auf, die einen möglichst **spielerischen gemeinschaftlichen Charakter** haben. Durch Begebenheiten aus der unmittelbaren Erfahrung 10-bis 14-Jähriger werden die Lernenden zum Nachdenken über Probleme angeregt, die in der Folge mit Mitteln der Mathematik gelöst werden können. Die häufig von Lernenden gestellte Frage nach dem Wozu sollte durch diese Vorgehensweise entbehrlich werden.

1.2 Aufbau von Grundvorstellungen

„Das Nachvollziehen der vorhandenen Lösungswege von Musteraufgaben trägt zum Handlungsbereich H3 (Interpretieren) bei und hilft gleichzeitig beim eigenständigen Darstellen von Lösungswegen.“

(Grosser N., Koth M., Waltenberger J.: Kompetenzorientierung. In: Handreichung – Bildungsstandards in Schulbüchern. BMUKK, S. 5)

Ein wesentlicher Aspekt beim Erarbeiten neuer Themenbereiche im Mathematikunterricht ist das **Herausbilden von Grundvorstellungen**. Diese können zu mathematischen Begriffen, Sachverhalten, Verfahren, zum Problemlösen und Modellbilden bei den Lernenden entwickelt werden, um so mit den mathematischen Inhalten jederzeit etwas zu assoziieren. Grundvorstellungen dienen weiters auch dazu, Gelerntes nicht durch bloßes Auswendiglernen zu speichern, sondern insbesondere dazu, Fähigkeiten und Fertigkeiten in leicht veränderten Situationen erfolgreich anwenden zu können.

Anhand vieler Musteraufgaben bietet das Lehrwerks „Mathematik verstehen“ zahlreiche Möglichkeiten für Lernende, anhand von einfacheren und komplexeren Einführungsaufgaben Vorstellungen detailliert zu entwickeln. **Geradlinig, schrittweise und mit vielen Veranschaulichungen** werden die Lernenden an einen neuen Themenbereich herangeführt, indem sie anhand bereits gelöster Aufgaben **Grundvorstellungen erwerben** können, die für die Bearbeitung analoger und vernetzter Aufgaben weiterentwickelt werden sollen.

Die Texte zur Theorie begleiten die Lernenden dann bei deren **individueller Reflexion mit dem Gelernten**, indem Wesentliches hervorgehoben und in Hinweisen und Bemerkungen auf etwaige Schwierigkeiten hingewiesen wird; zudem werden Ausnahmen erklärt und Fundamentales eingehend und anschaulich erläutert.

1.3 Förderung der Lese- und Spachkompetenz

„Ein Lehrwerk, das sich durch korrekte Fachsprache auszeichnet, gibt SchülerInnen ein gutes Sprachmodell für eigene Formulierungen. Im Buch vorhandene Erklärungstexte geben den Kindern ein Modell für das Formulieren von Begründungen und Erklärungen und ermöglichen das selbstständige Erarbeiten einzelner Stoffabschnitte anhand des Lehrbuchs.“

(Grosser N., Koth M., Waltenberger J.: Kompetenzorientierung. In: Handreichung – Bildungsstandards in Schulbüchern. BMUKK, S. 5)

Durch verständliche Texte und exakte Terminologie sowie Aufgaben, die speziell die Kommunikation unter Einbeziehung mathematischer Fachsprache anregen, werden nicht nur die Lese- und die Sprachkompetenz gefördert, auch die Fähigkeit des prozessorientierten Denkens sowie Fertigkeiten im Formulieren dieser Gedanken werden angeregt und weiterentwickelt.

Das Lehrwerk „Mathematik verstehen“ bietet in jedem Inhaltsbereich korrekte Bezeichnungen sowie unmissverständliche Anweisungen. Bei ausgeführten Aufgaben stellen die Formulierungen bei der Lösung eine hinreichend vollständige und präzise Bearbeitung der Aufgabe mit allen notwendigen Erklärungen und nachvollziehbaren Schritten dar. Dies hilft den Lernenden bei der Bearbeitung ähnlicher Aufgaben und stellt einen Leitfaden für korrekte Antworten, Argumentationen und Interpretationen weiterführender Aufgaben dar.

1.4 Einbindung von Technologie

Ein Hauptaugenmerk eines Lehrwerks für die Sekundarstufe I soll auf einen sinnvollen Umgang mit Technologie gerichtet sein. Der Einsatz von Computeralgebrasystemen nur um des Einsatzes selbst willen erscheint nicht vertretbar. Vielmehr sollte es das Ziel von Lehrenden sein, Technologie so in den Unterricht einzubauen, dass Veranschaulichungen, etwa durch dynamische Geometriesoftware, sehr einfach möglich gemacht, dadurch Vorstellungen unterstützt und schnelle Überprüfungen des elementaren Wissens und der grundlegenden Fertigkeiten Teil des Lernprozesses werden. In weiterer Folge soll Technologie einen zweckorientierten Beitrag als Rechenunterstützung leisten.

Im Lehrwerk „Mathematik verstehen“ wird Technologie sinnvoll in den Prozess des Aufbaus von Grundvorstellungen und Grundfertigkeiten eingegliedert. Nicht nur Veranschaulichungen durch GeoGebra-Applets bzw. Animationen, sondern zusätzliches Informationsmaterial und Aufgabensequenzen gehören zum Online-Material des Lehrwerks. Ein entsprechendes Symbol bei Texten und Aufgaben sowie ein zugehöriger Code machen den Zugang zu vielfältigen Unterrichtsergänzungen sehr leicht. Der Einsatz von Technologie kann so beim Aufbau von Grundvorstellungen helfen und aktuelle im Unterricht durchgenommene Themen mit bereits behandelten Stoffgebieten vernetzen und so die Nachhaltigkeit des Erarbeiteten fördern. Die Einführung des Taschenrechners findet behutsam statt und lässt einen kritischen Umgang damit zu.

1.5 Berücksichtigung der Bildungsstandards bei Inhalts-, Handlungs- und Komplexitätsdimensionen

„Mit der Einführung der Bildungsstandards geht auch eine gewisse Erwartungshaltung gegenüber Schulbüchern einher. Da sie kompetenzorientiert auf die Anforderungen der Bildungsstandards eingehen müssen, kommt der Aufgabenstellung eine besondere Rolle zu.“

(Grosser N., Koth M., Waltenberger J.: Kompetenzorientierung. In: Handreichung – Bildungsstandards in Schulbüchern. BMUKK, S. 4)

Ein Lehrwerk kann nicht zur Gänze aus Aufgaben bestehen, die lediglich der Testung von Wissen dienen. Aufgaben in einem Mathematiklehrbuch können in mindestens drei essentielle Typen unterteilt werden: Lernaufgaben, Übungsaufgaben und Testaufgaben.

Dieser Einteilung trägt das Lehrwerk „Mathematik verstehen“ in vollem Umfang Rechnung:

Lernaufgaben finden sich vor allem in der Rubrik „Grundlagen“ und bieten den Lernenden einen ersten Kontakt mit einem neuen Themenbereich. Mit dem Bearbeiten dieser Aufgaben werden grundlegende Fähigkeiten und Fertigkeiten erlernt, zB eine neue Art des Multiplizieren oder das Konstruieren einer eben erst kennengelernten geometrischen Figur. Weiters soll durch das Vertrautwerden mit der neuen Materie das Wesentliche erkannt werden, damit dies in vernetzten Aufgaben angewendet werden kann.

Übungsaufgaben finden sich teilweise in der Rubrik „Grundlagen“, aber vor allem in der Rubrik „Erweiterung und

Vertiefung“. Sie bieten den Lernenden die Möglichkeit bereits Gelerntes in Sachzusammenhängen und in vernetzten Formaten zu trainieren. Mit dem Bearbeiten dieser Aufgaben werden Fertigkeiten weiterentwickelt und somit wird das Verstehen mathematischer Zusammenhänge etabliert.

Testaufgaben sind in den Abschnitten zur Wiederholung unter dem Titel „Wissen und anwenden“ vorzufinden. Einerseits wird hier abgefragt, inwieweit die essentiellen Erkenntnisse aus einem Kapitel in eigenen Worten wiedergegeben werden können, andererseits wird in altersadäquaten Testformaten das Anwenden-Können dieses Wissens überprüft.

Das Lehrwerk „Mathematik verstehen“ ist so aufgebaut, dass die Kapitel nach den **vier Inhaltsbereichen** (I1: Zahlen und Maße, I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten, I3: Geometrische Figuren und Körper, I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen) geordnet sind. Erkennbar ist dies jeweils am oberen Rand einer Doppelseite. Jede Aufgabe der Rubriken „Grundlagen“ sowie „Erweiterung und Vertiefung“ ist mit den **Symbolen zu den jeweils angesprochenen Handlungsbereichen** versehen, also „D“ für Darstellen und Modellbilden (H1), „O“ für Rechnen und Operieren (H2), „I“ für Interpretieren (H3) und „A“ für Argumentieren und Begründen (H4). Vor allem bei Aufgaben zu Erweiterung und Vertiefung sind häufig mehrere Handlungsbereiche angegeben, da nur auf diese Weise ein ertragreiches Üben und Verstehen gewährleistet ist.

Die **Komplexitätsdimensionen** (K1, K2 und K3) werden in den Abschnitten „Wiederholung: Wissen und anwenden“ durch Akkusymbole bei den Aufgaben gekennzeichnet.

2 Aufbau des Lehrwerks

2.1 Einstieg in ein Kapitel

Jedes Kapitel beginnt mit einer **Nennung der Lernziele**. Diese spiegeln einerseits den Lehrplan und andererseits die Bildungsstandards wider. Jedes Kapitel und viele Abschnitte eröffnen mit einer **Einführungsaufgabe**. Diese ist entweder eine Aufgabe für Partner- oder Gruppenarbeit oder eine vorgeführte Musteraufgabe.

2.2 Theoretische Teile

Mit blauem Rand gekennzeichnet sind Einführungsaufgaben und Texte zur Theorie. Wichtige Sätze, Regeln und Definitionen werden durch **blau unterlegte Kästen** zusätzlich hervorgehoben. In den Bereich der Theorie fallen immer wieder Abbildungen, anhand derer Lernende Veranschaulichungen vorfinden, die das Erarbeitete in Form einer anderen Darstellung vor Augen führen. Dies in Verbindung mit vorgeführten Musteraufgaben fördert den Erwerb von Grundvorstellungen.

2.3 Musteraufgaben

Vollständig bearbeitete Musteraufgaben sind in **blauer Schrift** gehalten und **gelb unterlegt**. Sie bieten neben einer typischen Angabe eine Lösung oder mehrere Lösungswege an, die schrittweise und hinreichend genau erklärt aufgeschrieben sind. Auch hier helfen immer wieder Abbildungen, die Ausführungen nachzuvollziehen.

2.3 Unterteilung der Aufgaben in zwei Rubriken

Die Aufgaben sind in zwei Rubriken unterteilt: „Grundlagen“ sowie „Erweiterung und Vertiefung“. Unter „Grundlagen“ sind **Lernaufgaben** und **Übungsaufgaben** zu finden, die den Lernenden einen ersten Kontakt mit einem neuen Themenbereich bieten und das Erlernen grundlegender Fähigkeiten und Fertigkeiten fördern. Die Rubrik „Erweiterung und Vertiefung“ beinhaltet vor allem **Übungsaufgaben mit vernetzendem Charakter** sowie **Aufgaben zum Reflektieren**, die das Verstehen des Gelernten fördern. Vor jeder Aufgabennummer in diesen Rubriken sind die hierbei angesprochenen Handlungsdimensionen genannt.

2.4 Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung in einem blau unterlegten Kasten beendet die Lernabschnitte eines Kapitels. Diese ist häufig nicht besonders umfangreich, da vor allem Wert auf eine **knappe Übersicht** gelegt wird. Oft wird das Wesentliche nur in Worten wiedergegeben, was der Förderung der Lese- und Sprachkompetenz dient. Detaillierte Erläuterungen sind in den Theorieteil in den einzelnen Lernabschnitten zu finden. Dabei ist sehr wohl daran gedacht, dass Lernende bei Unsicherheiten zurückblättern und einen bestimmten Abschnitt noch einmal durcharbeiten.

2.5 Sonderseiten

In jedem Kapitel finden sich nach dem Lernabschnitt zwei **Sonderseiten**, die dem gemeinsamen Aufarbeiten des zuvor Gelernten bzw. der intensiveren Auseinandersetzung mit dem Themenbereich dienen. Die Seite „**DENKwürdiges**“ bietet je nach Kapitel Denksportaufgaben, Spiele, Projekte, Knocheleien, Fermi-Aufgaben oder weitere Aufgaben für offene Lernformen an, die sich besonders gut dafür eignen, in Kleingruppen bearbeitet zu werden. Ebenso kann in Supplierstunden darauf zurückgegriffen werden. Die vielfältigen Aufgaben stellen eine Verknüpfung zwischen den mathematischen Inhalten des Kapitels einerseits und realitätsnahen sowie auch kuriosen Kontexten andererseits her.

Auf der Seite „**MERKwürdiges**“ können Zusatzinformationen zu den Themenbereichen, historische Entwicklungen oder wissenschaftliche Aspekte aus dem Themenumfeld nachgelesen werden. Die Seite bietet ferner Anregungen für Referate.

2.6 Kontrollseiten

Auf jeweils einer Doppelseite sind unter der Bezeichnung „**Wiederholung: Wissen und anwenden**“ Fragen und Aufgaben zu finden, die einen Rahmen mit den anfangs genannten Lernzielen des Kapitels bilden. Unter der Überschrift „**Wiederholung: Wissen**“ können die Lernenden **sorgfältig ausgewählte Fragen** zu den Lerninhalten des Kapitels beantworten und damit unter Beweis stellen, dass die Lernziele insofern erreicht worden sind, dass **Definitionen, Sätze, Rechenregeln** gelernt sowie **Lösungsprozesse** erkannt und verstanden worden sind. Das Lehrwerk verzichtet mit Absicht auf die Möglichkeit, Aussagen wie „Ich kann Gleichungen lösen.“ oder „Ich kann ein Trapez konstruieren.“ bloß anzukreuzen, weil dadurch nur eine Scheinsicherheit bei Lernenden vermittelt wird. „Mathematik verstehen“ bietet die Möglichkeit, Fragen in eigenen Worten zu beantworten und diese Antworten dann entweder durch Nachschlagen im Kapitel selbst oder am Ende des Lehrbuchs mit den Lösungen dieser Fragen zu vergleichen.

Ähnliches gilt auch für den Abschnitt „**Wiederholung: Anwenden**“. In den **Aufgaben, die nach den Komplexitätsdimensionen der Bildungsstandards geordnet** sind, kann das Wissen in vielerlei Aufgabenformaten angewendet werden, die sich den **Aufgabentypen der Bildungsstandards** stark annähern. Die Lösungen zu diesen Aufgaben finden sich ebenso am Ende des Lehrbuchs.

Die Doppelseite bietet demnach die Möglichkeit der Selbstkontrolle durch **individuelle Auswertung** bei jeder Aufgabe. Bei Bedarf kann bei erfolgreichem Durcharbeiten gern jeweils ein lachender Smiley angekreuzt werden.

2.7 Glossar

Damit man Mathematik wirklich verstehen kann, ist es zwingend notwendig, **Fachbegriffe** hinsichtlich ihrer **Herkunft** und **Bedeutung** zu erklären. Dies ist durch Nachschlagen in einem **Glossar** möglich, in dem Informationen über die wichtigsten Bezeichnungen aufgelistet sind.

2.8 Verzeichnisse

Ein Verzeichnis der verwendeten **mathematischen Zeichen** sowie ein **Stichwortregister** finden sich am Ende des Lehrbuchs. Die fettgedruckten Begriffe im Register sind im Glossar erklärt.

3 Bildungs- und Lehraufgabe im Mathematikunterricht

3.1 Ziele für Lernende

Lernende sollen im Mathematikunterricht eine Erweiterung ihres Bildungshorizonts und damit eine Bereicherung ihrer Weltsicht erfahren. Dies wird im Lehrplan für Mathematik folgendermaßen zusammengefasst:

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- *in den verschiedenen Bereichen des Mathematikunterrichts Handlungen und Begriffe nach Möglichkeit mit vielfältigen Vorstellungen verbinden und somit Mathematik als beziehungsreichen Tätigkeitsbereich erleben;*
- *mathematisches Können und Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Erlebnis- und Wissenswelt nutzen sowie durch Verwenden von Informationsquellen weiter entwickeln. Das Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind;*
- *durch Reflektieren mathematischen Handelns und Wissens Einblicke in Zusammenhänge gewinnen und Begriffe bilden;*
- *in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen, wobei sie dazu hingeführt werden sollen, Lernprozesse selbstständig zu gestalten;*
- *durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lösungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen planen und in der Durchführung erproben;*
- *verschiedene Technologien (zB Computer) einsetzen können.*

(https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.html, Stand: 3. Juli 2014)

All diese Ziele kommen im Lehrwerk „Mathematik verstehen“ unübersehbar zum Einsatz: Aus den bekannten Gegebenheiten der Erlebniswelt von Lernenden sollen Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen entwickelt werden, die nicht nur angewendet, sondern auch hinterfragt und verschiedenartig gedeutet werden sollen. Das Argumentieren und das Reflektieren hinsichtlich prozessorientierter Handlungen sind ebenso wichtiger Bestandteil wie das Exaktifizieren bei operativen Tätigkeiten und bei Formulierungen. Zudem wird ein zweckorientierter Umgang mit Technologie angestrebt.

3.2 Ziele im Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler sollen durch Erwerb und Nutzung grundlegender Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten Einsichten in die Gebiete Arithmetik, elementare Algebra und Geometrie gewinnen.

- *Arithmetik: mit rationalen Zahlen rechnen, Rechenergebnisse abschätzen, elektronische Hilfsmittel benutzen können, Gesetzmäßigkeiten des Rechnens kennen und anwenden können;*
- *elementare Algebra: Variablen als Mittel zum Beschreiben von Sachverhalten, insbesondere von Gesetzmäßigkeiten und funktionalen Beziehungen, und zum Lösen von Problemen verwenden können; algebraische Ausdrücke und Formeln bzw. Gleichungen umformen können;*
- *Geometrie: mit grundlegenden geometrischen Objekten und mit Beziehungen zwischen diesen Objekten vertraut werden, zeichnerische Darstellungen von ebenen und räumlichen Gebilden anfertigen können, räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln und Längen-, Flächen- und Volumsberechnungen durchführen können, geeignete Sachverhalte geometrisch darstellen und umgekehrt solche Darstellungen deuten können.*

(https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.html, Stand: 3. Juli 2014)

Diese Kurzübersicht stellt nicht nur die Grundlage für den Lehrplan der Sekundarstufe I dar, sondern auch für die Bildungsstandards, die mit vier Inhaltsbereichen die Spanne dafür festlegen, was den Lernenden beigebracht werden soll. Die Ziele im Unterricht beziehen sich jedoch auch auf mathematische Grundtätigkeiten, die wiederum in Gestalt der vier Handlungsdimensionen vertreten sind.

In Zeiten von überall abrufbaren Informationen und jederzeit einsetzbaren elektronischen Rechenhilfsmitteln liegt ein wesentlicher Schwerpunkt auf dem Darstellen, dem Modellbilden, dem Argumentieren und Interpretieren. Dazu ist ein Erkennen und Verstehen mathematischer Sachverhalte notwendig. Das heißt nun nicht, dass das reine (händische) Rechnen und Operieren völlig verdrängt wird. Es hat sich lediglich im Bedeutungsspektrum etwas verlagert, was im Unterricht wahrnehmbar sein sollte.