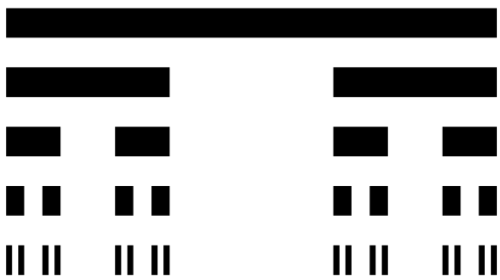
Thema: Fraktale Dimensionen		**Grundkompetenz:**	
Name:	**Schwierigkeitsgrad:** mittel		**Klasse:**

1) **Die Cantor-Menge**

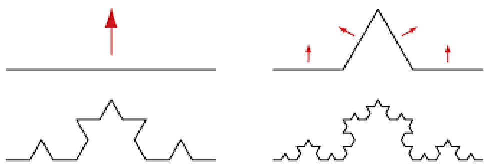
Die Cantor-Menge lässt sich durch folgende unendliche Iteration (Wiederholung einer immer gleichbleibenden Handlungsanweisung) erzeugen:
Aus einer Strecke wird jeweils das mittlere Streckendrittel entfernt. Aus den übrig gebliebenen Strecken wird wieder jeweils da mittlere Streckendrittel entfernt. Wird dieser Vorgang unendlich oft fortgesetzt entsteht eine „sehr löchrige“ Linie.
Schätze deren Dimension ab und bestimme sie anschließend rechnerisch.



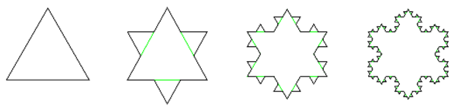
Durchführung der ersten vier Iterationsschritte zur Erzeugung der Cantor-Menge

2.) **Die Koch-Kurve**

Die Koch-Kurve lässt sich durch folgende unendliche Iteration (Wiederholung einer immer gleichbleibenden Handlungsanweisung) erzeugen:
Eine Strecke wird durch vier gleichlange Einzelstrecken ersetzt, wobei jede Einzelstrecke ein Drittel der Länge der ursprünglichen Strecke hat. Die Einzelstrecken werden wie in der Abbildung angeordnet. Mit jeder, der entstanden Einzelstrecken, wird nun genauso verfahren. Wird dieser Vorgang endlos fortgesetzt, entsteht eine „sehr ausgefranst“ Linie.
Schätze deren Dimension ab und bestimme sie anschließend rechnerisch.



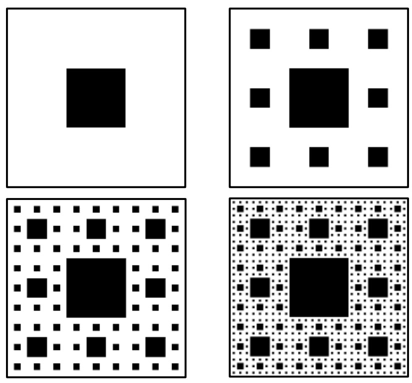
Durchführung der ersten drei Iterationsschritte zur Erzeugung der Koch-Kurve



Besteht jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks aus einer Kochkurve, erhält man die Schneeflockenkurve.

3.) **Der Sierpinski-Teppich**

Der Sierpinski-Teppich lässt sich durch folgende unendliche Iteration (Wiederholung einer immer gleichbleibenden Handlungsanweisung) erzeugen:
Aus einem Quadrat wird in der Mitte ein Quadrat mit einem Neuntel der Fläche entfernt. Aus den 8 Quadraten um das entfernte Quadrat wird auf die gleiche Weise das mittlere Quadrat entfernt. Wird dieser Vorgang endlos fortgesetzt, entsteht eine „sehr löchrige“ Fläche.
Schätze deren Dimension ab und bestimme sie anschließend rechnerisch.



Durchführung der ersten drei Iterationsschritte zur Erzeugung des Sierpinski-Teppichs

4.) **Der Menger-Schwamm**

Durch welche Iterationsvorschrift wird der Menger-Schwamm erzeugt.
Schätze dessen Dimension ab und bestimme sie anschließend rechnerisch.

Abbildungsquelle: Wikipedia

Lösungen:

1) Die Dimension wird zwischen der eines Punktes und der einer Linie liegen, also zwischen 0 und 1.
$$D = \frac{\ln 2}{ln3} = \frac{ln4}{\ln 9} \approx 0{,}6309$$

2) Die Dimension wird zwischen der einer Linie und der einer Fläche liegen, also zwischen 1 und 2.
$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \frac{\ln 16}{\ln 9} \approx 1{,}2619$$

3.) Die Dimension wird zwischen der einer Fläche und der einer Linie liegen, also zwischen 1 und 2.
$$D = \frac{\ln 8}{\ln 3} = \frac{\ln 64}{\ln 9} \approx 1{,}8928$$

4.)
Iterationsvorschrift:
Aus einem Würfel, wird in der Mitte ein Würfel mit einem Drittel der ursprünglichen Kantenlänge entfernt. Um diesen entfernten Würfel, kann man sich nun 20 verbleibende Würfel mit einem Drittel der ursprünglichen Kantenlänge vorstellen. Aus jedem dieser Würfel wird wieder der mittlere Würfel entfernt. Wird dieser Vorgang endlos fortgesetzt, entsteht eine „sehr löchriges" Volumen.
Die Dimension wird zwischen der eines Volums und der einer Fläche liegen, also zwischen 2 und 3.
$$D = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2{,}7268$$