9 VEKTOREN IN $\mathbb{R}^3$

W 9.01 Wie sind die Addition, die Subtraktion und die Vervielfachung von Vektoren in $\mathbb{R}^3$ definiert? Gibt es Analogien zu $\mathbb{R}^2$?

W 9.02 Wie ist der Betrag eines Vektors in $\mathbb{R}^3$ definiert?

W 9.03 Wie ist das skalare Produkt zweier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ definiert?

W 9.04 Wie lässt sich das Winkelmaß zweier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ berechnen?

W 9.05 Wie ist das Vektorprodukt zweier Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ definiert? Welche Eigenschaften besitzt es?

W 9.06 Wie kann man in $\mathbb{R}^3$ einen Vektor ermitteln, der zu zwei von $\vec{o}$ verschiedenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal ist? Was lässt sich über Betrag und Richtung dieses Vektors aussagen?

W 9.01 Es seien $A = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $B = (b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ und $r \in \mathbb{R}$.
Man setzt:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \qquad r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Für Vektoren in $\mathbb{R}^3$ gelten analoge Rechengesetze wie für Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Diese kann man wie in $\mathbb{R}^2$ begründen, indem man die Rechnungen für die einzelnen Koordinaten getrennt aufschreibt. Man kann also mit Vektoren in $\mathbb{R}^3$ im Prinzip so rechnen wie mit Vektoren in $\mathbb{R}^2$.

W 9.02 Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a} = (a_1 \mid a_2 \mid a_3) \in \mathbb{R}^3$ versteht man $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

W 9.03 Für alle $A, B \in \mathbb{R}^3$ gilt: Die reelle Zahl $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ nennt man skalares Produkt der Vektoren A und B.

W 9.04 Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ seien durch Pfeile von einem gemeinsamen Anfangspunkt aus dargestellt. Das Maß φ des Winkels, den diese beiden Pfeile miteinander einschließen, nennt man das Winkelmaß der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Es gilt: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

W 9.05 Es seien $\vec{a} = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $\vec{b} = (b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Dann nennt man den Vektor

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ Vektorprodukt oder vektorielles Produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht parallele und von $\vec{o}$ verschiedene Vektoren, dann gilt:
- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Flächeninhalt eines von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem.

W 9.06 Man ermittelt $\vec{a} \times \vec{b}$. Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ normal und ist so orientiert, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden. Der Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist so groß wie der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.