6 ERGÄNZUNGEN ZU FUNKTIONEN

W 6.01 Zeige an einem Beispiel, dass sich aus einer Formel verschiedene Funktionen herauslesen lassen! Gib typische Fragen an, die man dazu stellen kann!

W 6.02 Was versteht man unter der Verkettung zweier Funktionen? Gib ein Beispiel an!

W 6.03 Was versteht man unter der Umkehrfunktion f^* einer Funktion f? Unter welchen Bedingungen existiert f^*? Was lässt sich über die Graphen von f und f^* aussagen?

W 6.04 Die Definition einer Funktion $f: A \to B$ haben wir in mehreren Schritten verallgemeinert:
1. Schritt: $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$
2. Schritt: f: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$
3. Schritt: A und B sind Mengen geometrischer Objekte.
4. Schritt: A und B sind beliebige Mengen.

Gib für jeden Schritt ein Beispiel an!

W 6.05 Gegeben sei eine Funktion $f: A \to B \mid x \mapsto f(x)$. Gib verschiedene Namen für x und f(x) an! Wie nennt man die Mengen A und B? Was versteht man unter der Wertemenge f(A)? Welche Beziehung besteht zwischen den Mengen f(A) und B?

W 6.01 ZB: $A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$, $r = \sqrt{\frac{360 \cdot A}{\pi \cdot \alpha}}$, $\alpha = \frac{360 \cdot A}{\pi \cdot r^2}$

Zugehörige Funktionen:

$(r \mid \alpha) \mapsto A(r, \alpha)$	$(A \mid \alpha) \mapsto r(A, \alpha)$	$(A \mid r) \mapsto \alpha(A, r)$
$r \mapsto A(r)$, α konstant	$A \mapsto r(A)$, α konstant	$A \mapsto \alpha(A)$, r konstant
$\alpha \mapsto A(\alpha)$, r konstant	$\alpha \mapsto r(\alpha)$, A konstant	$r \mapsto \alpha(r)$, A konstant

Typische Fragestellungen für die Funktion $r \mapsto A(r)$:
Wie ändert sich A(r), wenn r wächst (fällt)?
Wie ändert sich A(r), wenn r verdoppelt, verdreifacht, …, ver-k-facht wird?
Wie muss r verändert werden, damit sich A(r) verfünffacht?
Ist A(r) zu r direkt oder indirekt proportional?
Von welchem Typ ist die Funktion $r \mapsto A(r)$?
Wie sieht der Graph der Funktion $r \mapsto A(r)$ aus?

W 6.02 Seien $f: A \to \mathbb{R}$ und $g: A' \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(A) \subseteq A'$, dann nennt man die Funktion $g \circ f$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ die Verkettung der Funktionen f und g.
Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 1$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \ln x$, $(g \circ f): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(x) = \ln(x^2 + 1)$

W 6.03 Sei $f: A \to B$ eine reelle Funktion mit der Eigenschaft, dass jedes Element der Zielmenge B genau ein Urelement $x \in A$ besitzt. Dann nennt man die Funktion $f^*: B \to A$, die jedem Element $f(x) \in B$ sein Urelement $x \in A$ bezüglich f zuordnet, die Umkehrfunktion der Funktion f. Damit f^* existiert, muss also jedes Element der Zielmenge von f genau ein Urelement besitzen.
Die Graphen von $f: x \mapsto f(x)$ und $f^*: x \mapsto f^*(x)$ liegen symmetrisch zur 1. Mediane.

W 6.04 1. Schritt: $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \mid x \mapsto x^3$
2. Schritt: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$
3. Schritt: A = Menge der Dreiecke einer Ebene E, B = Menge der Punkte derselben Ebene E
f: A → B ordnet jedem Dreieck XYZ seinen Schwerpunkt S zu.
4. Schritt: A = Menge der lebenden Menschen, B = Menge der lebenden und verstorbenen Menschen
f: A → B ordnet jedem lebenden Menschen dessen Mutter zu.

W 6.05 x nennt man Argument oder Stelle oder Urbild von f(x).
f(x) nennt man Funktionswert von f an der Stelle x oder Bildelement von x.
A nennt man Definitionsmenge, B Zielmenge von f.
$f(A) = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$; $f(A) \subseteq B$