Thema: Achilles und die Schildkröte		**Grundkompetenz:**
Name:	**Schwierigkeitsgrad:**	**Klasse:**

Achilles und die Schildkröte:

http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/uploads/6/9729_achilles.gif

Achilles, der mit einer 10mal höheren Geschwindigkeit als eine Schildkröte läuft, gibt der Schildkröte 100 m Vorsprung und läuft ihr dann nach.

Der griechische Philosoph Zenon von Elea (495 v. Chr. bis 430 v. Chr.) meinte nun, dass Achilles die Schildkröte nie einholen könne.
Er erklärte dies so: Bis Achilles nach dem Start des Rennes die Position der Schildkröte erreicht, ist diese ja schon ein Stück weiter gekrochen. Bis Achilles die neue Position der Schildkröte erreicht, ist diese abermals ein Stück weiter. Bis Achilles diese Position der Schildkröte erreicht, ist diese wieder ein (wenn auch sehr kleines) Stück weiter. So könnte man dies in alle Ewigkeit fortsetzen. Die Schildkörte ist immer ein kleines Stückchen vor Achilles. Somit kann diese nie von ihm eingeholt werden.

Wie kann dieses Paradoxon gelöst werden?

Die Antwort liefert die Zeit. Man darf nämlich nicht übersehen, dass die Zeit, die verstreicht, bis Achilles die Position der Schildkröte erreicht, immer kürzer wird. D.h. die Zeitintervalle werden immer kleiner. Addiert man nun diese Zeitintervalle, bilden sie eine unendliche konvergente Reihe. Somit hat die Reihe eine endliche Summe und Achilles holt die Schildkröte in einer endlichen Zeit ein.

Auch die von Achilles zurückgelegten Wege bilden demnach eine unendliche konvergente Reihe.

Berechne, nach wie vielen Metern Achilles die Schildkröte einholt.

Thema: Achilles und die Schildkröte - Lösung		**Grundkompetenz:**
Name:	**Schwierigkeitsgrad:**	**Klasse:**

Achilles und die Schildkröte:

Achilles, der mit einer 10mal höheren Geschwindigkeit als eine Schildkröte läuft, gibt der Schildkröte 100 m Vorsprung und läuft ihr dann nach.

http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/uploads/6/9729_achilles.gif

Der griechische Philosoph Zenon von Elea (495 v. Chr. bis 430 v. Chr.) meinte nun, dass Achilles die Schildkröte nie einholen könne.
Er erklärte dies so: Bis Achilles nach dem Start des Rennes die Position der Schildkröte erreicht, ist diese ja schon ein Stück weiter gekrochen. Bis Achilles die neue Position der Schildkröte erreicht, ist diese abermals ein Stück weiter. Bis Achilles diese Position der Schildkröte erreicht, ist diese wieder ein (wenn auch sehr kleines) Stück weiter. So könnte man dies in alle Ewigkeit fortsetzen. Die Schildkörte ist immer ein kleines Stückchen vor Achilles. Somit kann diese nie von ihm eingeholt werden.

Wie kann dieses Paradoxon gelöst werden?

Die Antwort liefert die Zeit. Man darf nämlich nicht übersehen, dass die Zeit, die verstreicht, bis Achilles die Position der Schildkröte erreicht, immer kürzer wird. D.h. die Zeitintervalle werden immer kleiner. Addiert man nun diese Zeitintervalle, bilden sie eine unendliche konvergente Reihe. Somit hat die Reihe eine endliche Summe und Achilles holt die Schildkröte in einer endlichen Zeit ein.

Auch die von Achilles zurückgelegten Wege bilden demnach eine unendliche konvergente Reihe.

Berechne, nach wie vielen Metern Achilles die Schildkröte einholt.

Hat Achilles 100 m zurückgelegt, ist die Schildkröte 10 m weitergekrochen.
Hat Achilles 10 m zurückgelegt, ist die Schildkröte 1 m weitergekrochen.
Hat Achilles 1 m zurückgelegt, ist die Schildkröte 0,1 m weitergekrochen.
Hat Achilles 0,1 m zurückgelegt, ist die Schildkröte 0,01 m weitergekrochen. ...

Die Streckenlängen $b_1 = 100$ m, $b_2 = 10$ m, $b_3 = 1$ m, $b_4 = 0{,}1$ m usw. bilden eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{10}$.

Achilles holt die Schildkröte nach $s = 100 + 10 + 1 + 0{,}1 + \ldots = \frac{b_1}{1-q} = \frac{100}{1-\frac{1}{10}} \approx 111{,}11$ m ein.

Thema: Die harmonische Reihe		**Grundkompetenz:**
Name:	**Schwierigkeitsgrad:**	**Klasse:**

Die Glieder der sogenannten harmonischen Folge sind die Kehrwerte der positiven ganzen Zahlen, d.h. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Für das Bildungsgesetz der harmonischen Folge gilt: $a_n = \frac{1}{n}$ mit $n \geq 1$.

Die harmonische Folge konvergiert gegen Null, d.h. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, und ist monoton fallend.

Die Summation der Folgenglieder liefert die **harmonische Reihe** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

Obwohl die harmonische Folge konvergent ist, ist die harmonische Reihe **divergent**. Die Divergenz der harmonischen Reihe wurde 1689 von Jacob Bernoulli nachgewiesen. Die Idee von Bernoulli war, eine Reihe zu finden, von der man weiß, dass sie kleiner als die harmonische Reihe ist. Führt man nun den Beweis, dass die kleinere Reihe divergiert, kann man daraus folgern, dass auch die größere Reihe, als die harmonische Reihe, divergiert.

Beweis:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots$

Beginnend bei $\frac{1}{3}$ werden nun 2, 4, 8, 16, 32, ... Summanden zusammengefasst.

$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n}\right) + \ldots$

Es gilt:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

usw. $\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

d.h. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n\ Summanden}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty$

Daher strebt auch die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots$ gegen ∞.

Die harmonische Reihe ist demnach divergent.