g_1: X = $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ g_2: X = $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ g_3: X = $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

e: –11x – 12y + 29z = 55

a)

Schnittpunkt von g_1 und e → R:

$$-11 \cdot 2 - 12 \cdot (-4 + 2s) + 29 \cdot (1 + 3s) = 55$$
$$63s + 55 = 55$$
$$s = 0 \quad \rightarrow R = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2|-4|1)$$

Schnittpunkt von g_1 und g_2 → S:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

I: $2 = 2 + 2r$ → $r = 0$
II: $-4 + 2s = 2 - 3r$
III: $1 + 3s = 10 - 7r$

$$S = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} = (2|2|10)$$

b)

Abstand des Punktes S = (2|2|6) von der xy-Ebene → Höhe der Pyramide G

h = 6 (z-Koordinate von S!) ... Höhe der Pyramide G

c)

A = (0|0|0)   B = (8|0|0)   C = (4|8|0)   S = (2|2|6)

Volumen der Pyramide G:

$V = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AS}\right|$ $\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = 64$$

d)

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}}{\sqrt{61 \cdot 62}} = \frac{24}{\sqrt{3782}} \quad \rightarrow \quad \alpha = 67{,}03°$$

e)

Schnittpunkt der Geraden X = $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit der xy-Ebene z = 0:

6 – 3u = 0 → u = 2 → Schattenpunkt P = $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ = (4|4|0)