48 Vom Leben und Sterben der Sterne

Vertiefung und Kompetenzüberprüfung

Martin Apolin (Stand Oktober 2012)

Die Geburt von Sternen, Sonnensystem

A1 Leite die Gleichung für die Fluchtgeschwindigkeit eines Objekts im Einfluss einer Zentralmasse ab. Gehe dazu von der Formel $W_H = mGM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$ für die Hebearbeit im inhomogenen Feld und von der kinetischen Energie $E_k = \frac{mv^2}{2}$ aus. Überlege, was mit den Energien bei einer gelungenen "Flucht" passiert.

A2 a Du bist aus dem Alltag gewohnt, dass Gase immer das zur Verfügung stehende Volumen gleichmäßig ausfüllen. Es wird ziemlich sicher niemals passieren, dass sich die Luft in diesem Raum auf einmal zu einer Kugel zusammenballt. Auf der anderen Seite gibt es aber Gaskugeln im Weltall, nämlich die Sterne. Warum?

A2 b Gasmoleküle haben eine mittlere kinetische Energie von $E_k = \frac{3}{2}kT$ ($k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ J/K). Damit sich eine interstellare Gaswolke zusammenziehen kann, muss diese mittlere kinetische Energie kleiner sein als die Fluchtgeschwindigkeit v_F. Leite damit eine allgemeine Gleichung für die Mindestmasse M dieser Gaswolke ab. Verwende dazu das Ergebnis aus A1.

A2 c Nimm eine kugelförmige interstellare Masse an. Das Kugelvolumen ist $V = \frac{4r^3\pi}{3}$ und die Dichte wird durch die Gleichung $\rho = \frac{M}{V}$ beschrieben. Berechne allgemein den Radius einer solchen Kugelwolke.

A2 d Berechne allgemein die Mindestmasse einer kugelförmigen Gaswolke, die auf Grund ihrer Gravitation kollabiert. Verwende dazu die Ergebnisse aus A2 b und c.

A3 a Interstellare Materie hat eine typische Dichte von 10^{-21} kg/m^3 und eine Temperatur von 100 K und besteht aus Wasserstoffgas. Berechne mit diesen Daten Mindestmasse und Radius der Gaswolke, damit diese kollabieren kann. Du benötigst dazu die Konstanten $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ J/K und $G = 6{,}67 \cdot 10\text{-}11$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}. Verwende weiters das Ergebnis von A2 c und d und hilf dir mit Tab. 1!

Teilchen	Masse in kg	Ladung	relative Masse
Neutron (n)	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$	neutral	1838,7
Proton (p^+)	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$	plus	1836,2
Elektron (e^-)	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$	minus	1

Tab. 1

A3 b Rechne die Ergebnisse aus A3 a in Sonnenmassen ($2 \cdot 10^{30}$ kg) und Lichtjahre um. Nimm dabei für *c* den Wert $3 \cdot 10^8$ m/s.

A4 Versuche größenordnungsmäßig abzuschätzen, wie lange der Kollaps einer interstellaren Wolke dauert. Gehe dazu folgendermaßen vor:

a Die Gleichung für die Fallstrecke bei konstanter Fallbeschleunigung lautet $s = \frac{g}{2}t^2$. In unserem Fall ist die Fallstrecke der Radius der Wolke. Forme nach t um!

b Die Gewichtskraft $F = mg$ eines Teilchens am Rande der Wolke entspricht der Gravitationskraft $F = G\frac{mM}{r^2}$. Daraus kannst du eine allgemeine Gleichung für g ableiten.

c Leite mit den Ergebnissen aus a und b eine Gleichung für die Kontraktionszeit bei gleichbleibendem g ab.

d Setzte in die Gleichung aus c die Werte für die interstellare Wolke aus A3 a ein und drücke das Ergebnis in Jahren aus. *G* hat den Wert $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}.

A5 Überlege qualitativ, warum sich eine Gaswolke erwärmen muss, wenn sie sich zusammenzieht. Warum kommt dadurch der Kollaps irgendwann zum Stillstand?

A6 Unser Sonnensystem ist wahrscheinlich vor 4,6 Milliarden Jahren aus einer rotierenden Wolke interstellarer Materie entstanden (siehe Abb. 1 nächste Seite). Durch das Zusammenziehen erhöhte sich die Drehgeschwindigkeit, wodurch sich die Wolke zu einer Scheibe abflachte. In ihrem Zentrum bildete sich die Sonne, im äußeren Teil entstanden durch Zusammenklumpen der Materie nach und nach die heutigen Planeten. Welche Indizien unterstützen diese Theorie? Einige davon findest du in Tab. 2 und in der Legende. Begründe genau!

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
Abstand zur Sonne in AE	0,39	0,72	1	1,52	5,2	9,5	19,2	30,1
Umlaufzeit in Erdjahren	0,2408467	0,6151973	1	1,8808476	11,862615	29,447498	84,016846	164,79132
Masse in Erdmassen (ohne Monde)	0,06	0,81	1	0,11	318	95,2	14,5	17,2
Masse in Prozent der gesamten Planetenmasse	0,013 %	0,18 %	0,22 %	0,02 %	71,2 %	21,3 %	3,2 %	3,8 %
Durchmesser in Erddurchmessern	0,38	0,94	1	0,53	22,4	18,9	8,2	7,8
Neigung der Planetenbahn zur Erd-Ekliptik	7°	3,4°	0°	1,85°	1,3°	2,5°	0,8°	1,8°
Unterschied in den Halbachsen a und b	2,14%	0%	0,01%	0,43%	0,12%	0,14%	0,13%	0,01%
Neigung der Rotationsachse zur Umlaufbahn	0,01°	177,4°	23,4°	25,2°	3,1°	26,7°	97,8°	28,3°
mittlere Dichte des Planeten in kg/dm^3	5,43	5,24	5,52	3,94	1,31	0,69	1,20	1,66

Tab. 2 zu A6: Einige Daten zu den 8 Planeten. Alle Planeten rotieren vom Nordpol der Erde aus gesehen gegen den Uhrzeigersinn um die Sonne. Außerdem rotieren alle Planeten gegen den Uhrzeigersinn um ihre eigene Achse - mit zwei Ausnahmen. Welche sind das? Wie rotieren diese beiden Planeten? Wie kann man diese Anomalien erklären?

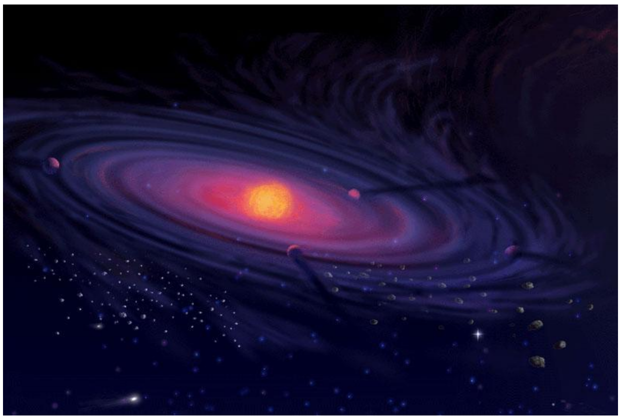

Abb. 1 Die junge Sonne und die sich gerade bildenden Planeten in einer künstlerischen Darstellung (Quelle: NASA).

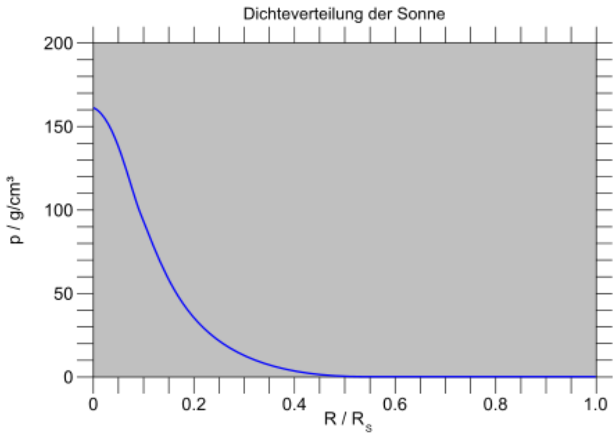

Abb. 3 (Quelle: Wikipedia)

A7 a In Abb. 2 und 3 sieht du die Druck- und Dichteverteilung im Inneren der Sonne. Welche qualitativen Aussagen kannst du treffen und wie kannst du sie begründen? Vergleiche den Druck im Inneren der Sonne mit dem Druck auf der Erdoberfläche. Was bedeutet die Einheit bar? In welcher SI-Einheit wird der Druck normalerweise angegeben?

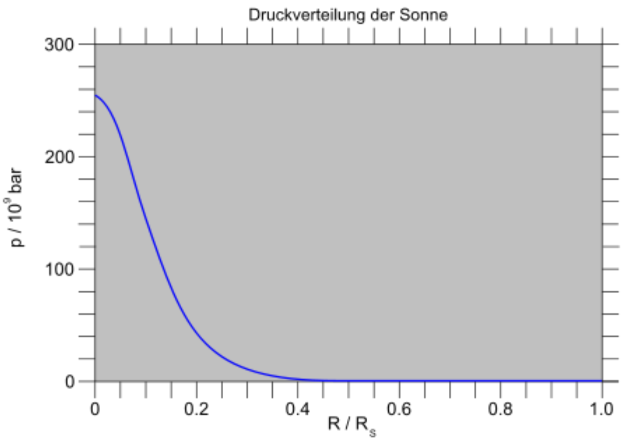

Abb. 2 (Quelle: Wikipedia)

A7 b Womit kann man die Dichte im Inneren der Sonne vergleichen? Verwende dazu Abb. 3 und Tab. 3.

	ungefähre Dichte in kg/m^3
Styropor	20–60
Kork	120–550
Holz	450–900
Aluminium	2700
Eisen	7860
Kupfer	8920
Blei	11340
Gold	19320

Tabelle 3: Beispiel für Dichten verschiedener Festkörper. Naturstoffe und Stoffe mit Hohlräumen haben je nach Beschaffenheit ziemlich schwankende Dichten.

A8 Leuchtende Gase erzeugen Linienspektren (siehe Abb. 4 nächste Seite). Die Sonne ist ein leuchtender Gasball. Trotzdem erzeugt sie *kein* Linienspektrum. Warum? Was ist bei der Sonne anders?

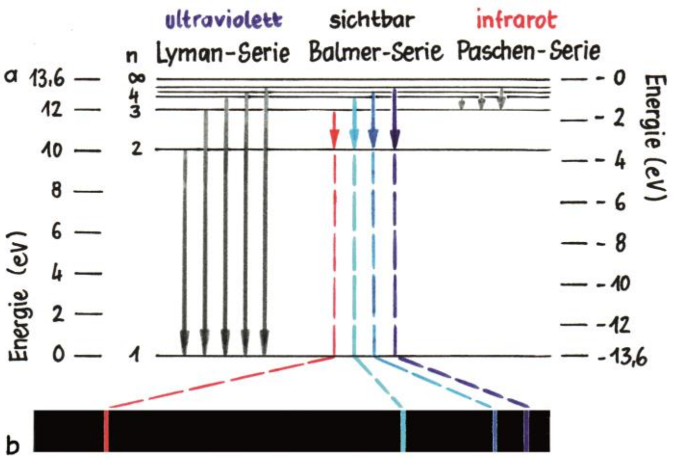

Abb. 4: Einige mögliche Übergänge zwischen den Energieniveaus bei Wasserstoff. Wo man den Nullpunkt der Energie annimmt, ist reine Geschmackssache. Nur die Balmer-Serie liegt im sichtbaren Bereich und erzeugt 4 Linien im Spektrum (Grafik: Jansosch Slama; siehe auch Abb. 35.6, S. 80, BB7).

A9 a Im Film *Tomb Raider* wird behauptet, dass sich die Planeten unseres Sonnensystems alle 5000 Jahre in einer sogenannten Linearkonstellation befinden, also in einer Reihe. Im Film *2012* wird behauptet, dass Ende 2012 alle Planeten *und* das Zentrum der Milchstraße in einer Reihe stehen, was angeblich nur alle 640.000 Jahre passiert. Ist eine solche Linearkonstellation tatsächlich möglich? Was müsste das für die Umlaufzeiten der Planeten bedeuten, und wie sieht es in der Praxis tatsächlich aus? Verwende für deine Antwort die Tabellen 2 und vervollständige damit Tabelle 4.

Planet	Umlaufzeit [a]	5000 a/Umlaufzeit
Merkur		
Venus		
Erde		
Mars		
Jupiter		
Saturn		
Uranus		
Neptun		

Tab. 4

A9 b In Abb. 5 siehst du, wie die Bahn eines kleinen Planeten von zwei großen beeinflusst wird. Erkläre, wie es zu den Bahnabweichungen kommt. Erkläre mit Hilfe dieser Abbildung allgemein, warum stabile Planetenbahnen nur dann möglich sind, wenn die Umlaufzeiten der Planeten in *keinem* ganzzahligen Verhältnis stehen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesem Effekt und den Lücken in den Ringen des Saturn (Abb. 6)?

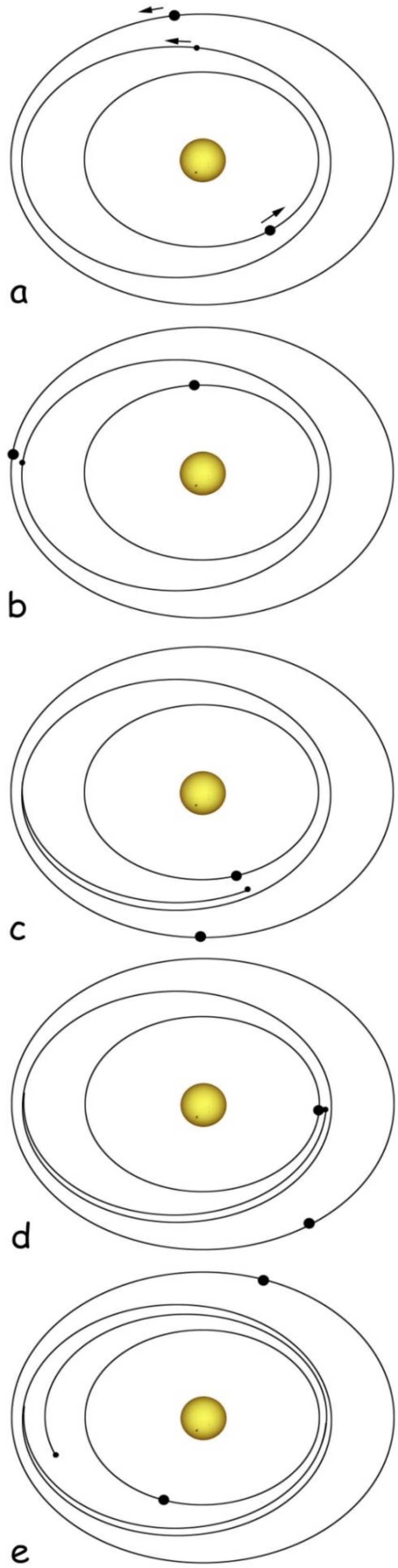

Abb. 5: Der Einfluss von zwei großen Planeten auf die Bahn eines kleinen (Grafik: Martin Apo-

Abb. 6: Längsschnitt durch die Ringe des Saturn (Quelle: NASA)

lin).

Das Leben der Sterne

A10 Ohne Tunneleffekt könntest du nicht leben! Was ist damit gemeint?

A11 Begründe den Tunneleffekt einerseits mit Hilfe der Unschärferelation und andererseits mit Hilfe der Wellenfunktion. Verwende für den zweiten Fall Abb. 7. Was hat dieser Effekt mit Kernfusion zu tun? Hilf dir mit Abb. 8!

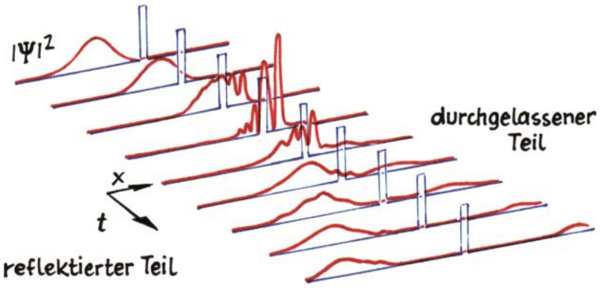

Abb. 7: Ein Quant läuft gegen eine Potenzialschwelle. Weil man dem Quant auf Grund der Unschärfe keine Bahn zuordnen kann, ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi|^2$ eingezeichnet. Du siehst, dass ein Teil der Welle reflektiert und ein Teil durchgelassen wird. Was bedeutet das aus der Sicht des Quants?

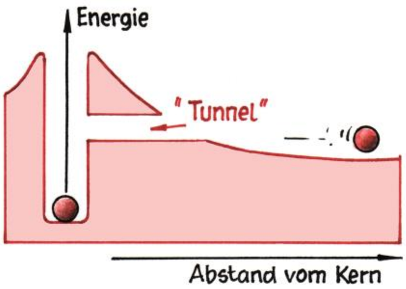

Abb. 8: Ein Proton tunnelt durch die Potenzialbarriere eines anderen Protons (Grafik: Janosch Slama).

A12 Wieso wären zur Kernfusion *ohne* Tunneleffekt extrem hohe Temperaturen notwendig? Was passiert überhaupt bei der Kernfusion und welche Grundkräfte spielen dabei eine Rolle? Hilf dir mit Tabelle 5.

Wechselwirkung	Austausch-Teilchen	Reichweite in m
starke	8 Gluonen	10^{-15}
elektromagnetische	Photon	∞
schwache	W^+, W^-, Z^0	10^{-18}
gravitative	Graviton	∞

Tab. 5: Die vier fundamentalen Wechselwirkungen bzw. Kräfte und ihre Reichweite.

A13 a Tabelle 6 zeigt die Tunnelwahrscheinlichkeit (letzte Spalte) für den Fall, dass sich zwei Protonen zentral bis auf den Abstand *x* annähern (erste Spalte). In der mittleren Spalte ist die Energie angegeben, die das aufprallende Proton benötigt, um auf den Abstand *x* an das andere Proton heranzukommen. Es wird hier angenommen, dass die Kernkraft bei 10^{-15} m zu wirken beginnt. Klassisch gesehen wäre für eine Fusion etwa 1 MeV nötig. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Tunnelwahrscheinlichkeit und der Energie des Protons?

Abstand x in 10^{-12} m	Energie in keV	Tunnelwahrscheinlichkeit
0,2	14	$9 \cdot 10^{-7}$
0,5	5,8	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$
1	2,9	$9 \cdot 10^{-15}$
2	1,4	$9 \cdot 10^{-21}$

Tabelle 6: Tunnelwahrscheinlichkeit (letzte Spalte) in Abhängigkeit des Abstands der beiden Protonen (erste Spalte). (Quelle: Lehrstuhl für Didaktik der Physik der LMU München, milq.tu-bs.de).

A13 b Wie viele Protonen müssen sich statistisch gesehen auf einen Abstand von $0{,}2 \cdot 10^{-12}$ m einem anderen Proton nähern, damit eines den Potenzialberg durchtunneln kann? Sieh in Tabelle 6 nach!

A13 c Erstelle mit einem Tabellenkalkulationsprogramm ein Diagramm, in dem du auf der x-Achse den Abstand *x* der Protonen und auf der y-Achse die Tunnelwahrscheinlichkeit einträgst. Welche Skalierung sollte für die y-Achse sinnvoller Weise gewählt werden?

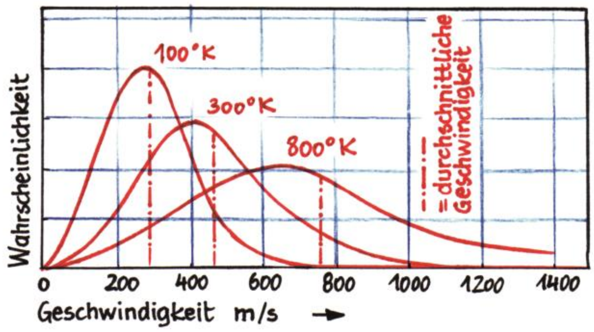

Abb. 9 zu A16 a: Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung der N_2-Moleküle bei verschiedenen Temperaturen (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 14.4, S. 135, BB5).

A14 a Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung oder auch Maxwell-Boltzmann-Verteilung (Abb. 9) ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung in der statistischen Physik. Sie beschreibt die Häufigkeit des Betrags der Teilchengeschwindigkeiten in einem idealen Gas. Welche qualitativen Aussagen kann man zur Abbildung treffen und wie kann man sie begründen? Warum ist die durchschnittliche Geschwindigkeit der Teilchen nicht identisch mit dem Maximum der Geschwindigkeitsverteilung?

A14 b In Abb. 10 siehst du, bei welcher Protonen-Energie die größte Wahrscheinlichkeit für die Fusion von Protonen in der Sonne auftritt. Man nennt das den Gamow-Peak. Welcher Zusammenhang besteht zu Abb. 9? Wie kann man das Phänomen gemeinsam mit Tabelle 6 erklären?

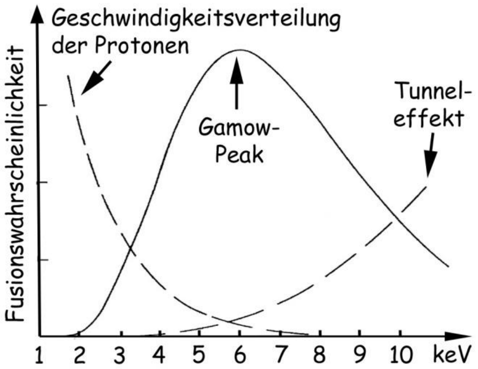

Abb. 10: Der Gamow-Peak bei der Fusion von Protonen in der Sonne (Grafik: Martin Apolin).

A15 In der ersten Auflage von Big Bang 8 war Abb. 11 zu sehen. Auf dem Bild ist eine "ungünstige" Beschriftung, deshalb wurde es später ausgetauscht. Um welche Beschriftung handelt es sich?

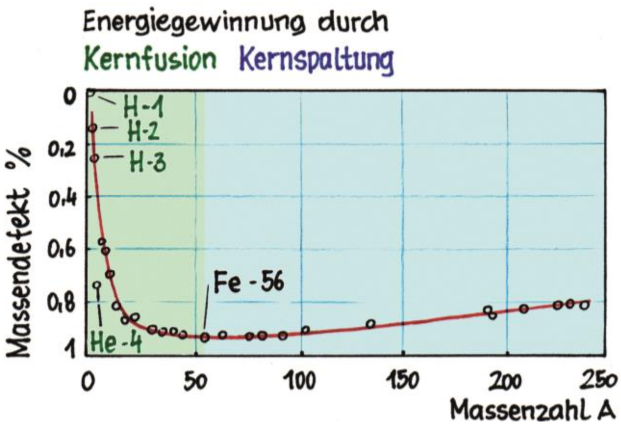

Abb. 11 (Grafik: Janosch Slama)

A16 Du stehst an einem wunderschönen Abend in der Natur und beobachtest den Sonnenuntergang. Du hast aber keine romantischen Gefühle und schätzt lieber ab, wie viele Sonnenneutrinos jede Sekunde pro cm^2 durch deinen Körper fliegen. Gehe dazu folgendermaßen vor:

a Die Sonne hat eine Leistung von $3{,}9 \cdot 10^{26}$ W. Die Proton-Proton-Reaktion in Abb. 12 macht rund 90 % der Fusionsvorgänge in der Sonne aus. Gehe vereinfacht von 100 % aus. Bei dieser Reaktion werden (inklusive der Zerstrahlung der Positronen e^+) in Summe $4{,}2 \cdot 10^{-12}$ J an Energie freigesetzt. Wie viele solcher Reaktionen müssen daher pro Sekunde in der Sonne ablaufen? Wie viele Neutrinos (ν_e) werden dabei freigesetzt?

$$4 \cdot {}^1H \Rightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e + 2\gamma + \text{Energie}$$

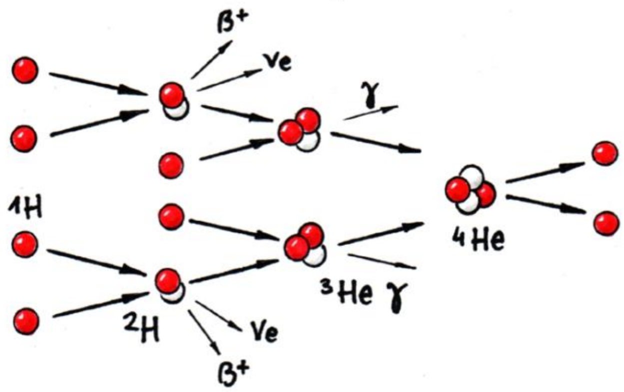

Abb. 12: Die Proton-Proton-Reaktion, die in unserer Sonne über 90 % der freigesetzten Energie ausmacht (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 46.15, S. 71).

b Der Abstand Erde-Sonne beträgt etwa 150 Milliarden Meter. Schätze ab, wie viele Neutrinos pro Sekunde auf der Erde durch einen Quadratzentimeter Fläche fliegen, der normal zur Achse Erde-Sonne steht. Diese Anzahl fliegt daher auch durch jeden Quadratzentimeter deines Körpers.

A17 a Wie viel Masse verliert die Sonne jede Sekunde auf Grund des Massendefekts? Verwende die Daten aus A16a.

A17 b Welche Seitenlänge hätte ein „Wasserwürfel" mit dieser Masse?

A17 c Müsste die Sonne durch diesen extremen Massenverlust nicht dahinschwinden wie Butter in der Sonne? Schätze ab, welchen Teil ihrer Masse sie im Laufe ihres Lebens verliert. Die aktuelle Masse der Sonne liegt bei $2 \cdot 10^{30}$ kg und sie befindet sich etwa 11 Milliarden Jahre auf der Hauptreihe. Verwende für die Abschätzung das Ergebnis aus A17 a.

A18 a Im Film „Sunshine" (2007) ist die Sonne im Jahr 2057 im Begriff zu erlöschen. Es kommt zum solaren Winter, in Folge dessen die Erde langsam einfriert und mit ihr alles Leben und die Hoffnung auf ein Fortbestehen der Menschheit. Könnte das tatsächlich passieren?

A18 b Ein Team von Wissenschaftlern versucht in diesem Film, die Fusion der Sonne durch eine Atombombe mit der Größe Manhattans (was immer das auch bedeuten soll) wieder anzufachen. Nimm an, dass Manhattan rund 22 km lang sowie etwa 3 km breit ist, und nimm auch noch eine Tiefe von 1 km dazu. Nimm an, dass die Bombe voll mit Uran-235 ist. Ein Kilogramm Uran hat eine Dichte von 19160 kg/m^3. Welche Uran-Masse ergibt sich dadurch? Wie realistisch ist der Bau einer solchen Bombe? Verwende für deine Überlegungen Tab. 7 und 8.

Rang	Land	Reserven	Anteil in %
1.	Australien	709.000	40,1
2.	Kanada	270.100	15,3
3.	Kasachstan	235.500	13,3
4.	Brasilien	139.600	7,9
5.	Südafrika	114.900	6,5
	Rest	297.300	16,9
	Welt	1.766.400	100,0

Tab. 7: Aufgeführt sind die Länder mit den größten Uranreserven 2008 (in Tonnen) und deren Anteil an den Weltreserven (in Prozent). Darunter versteht man die zu gegenwärtigen Preisen und mit heutigen Fördertechnologien gewinnbare Menge an Rohstoffen.

Isotop	Vorkommen	Halbwertszeit
U-234	0,0055 %	$2{,}455 \cdot 10^5$ a
U-235	0,72 %	$7{,}038 \cdot 10^8$ a
U-236	in Spuren	$23{,}42 \cdot 10^6$ a
U-238	99,27 %	$4{,}468 \cdot 10^9$ a

Tab. 8: Liste der Isotope von Uran

A19 Ein Blauer Riese (Abb. 13) hat eine typische Oberflächentemperatur von etwa 10.000 K. Eine blaue Reklameleuchte (Abb. 15) hat natürlich nicht diese Temperatur, weil sonst das Glas schmelzen würde. Warum ist das aber so? Worin liegt der Unterschied in den beiden Spektren?

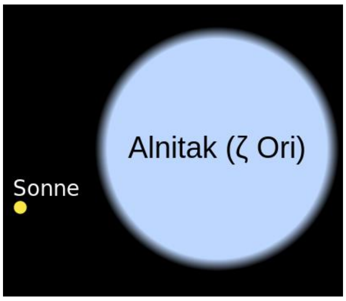

Abb. 13: Ein Blauer Riese ist ein heißer, großer Stern. Ein Beispiel ist Alnitak (oder Zeta Orionis), der östlichste Gürtelstern im Orion, (Grafik: CWitte; Quelle: Wikipedia).

Abb. 14: (Foto: Norbert Kaiser; Quelle: Wikipedia).

A20 Auf Fotos erscheinen Sterne meistens in verschiedenen Farben (Abb. 15). Woher kommen die Farbunterschiede? Und warum kann man Sterne mit freiem Auge nicht farbig sehen?

Abb. 15: Das Sternbild Skorpion (Foto: Roberto Mura; Quelle: Wikipedia)

A21 Ist jedes schwarz erscheinende Objekt ein Schwarzer Strahler? Können umgekehrt auch nicht schwarz erscheinende Objekte Schwarze Strahler sein? Begründe!

A22 Du nimmst einen fetten, grünen Scheinwerfer und beleuchtest damit die Sonne. Wie verändert sich die Farbe der Sonne an der beleuchteten Stelle?

A23 Durch Messungen konnte man die Masse-Leuchtkraft-Beziehung $L \sim m^3$ ermitteln. Weiters muss für jedes einzelne Teilchen (Masse M) in einem stabilen Stern (Masse m, Radius r, Temperatur T) der Gasdruck kT gleich dem Gravitationsdruck GmM/r sein. Weil G und k Konstanten sind, lautet die Gleichgewichtsbedingung für Normalsterne rT/m = const.

a Leite aus den Angaben oben und mit Hilfe des Gesetzes von STEFAN und BOLTZMANN $I = \sigma \cdot A \cdot T^4$ (Kap. 35.3, BB7) die Temperatur-Masse-Beziehung $T \sim m^{1/2}$ ab.

b Leite mit dem Ergebnis von A23 a und mit Hilfe von $rT \sim m$ die Radius-Masse-Beziehung $r \sim m^{1/2}$ ab.

c Die Zeit, die ein Stern auf der Hauptreihe verweilt (t_h), ist proportional zum "Brennstoffvorrat", also zur Masse. Die Hauptreihenzeit ist aber auch indirekt proportional zum "Brennstoffverbrauch" und somit zur Leuchtkraft L. Leite daraus die Beziehung $t_h \sim 1/L$ ab.

A24 Vervollständige Tab. 9, indem du die in der ersten Spalte angegebenen Proportionalitäten berücksichtigst.

	Blauer Riese	Sonne	Roter Zwerg
relative Masse M	30	1	0,3
relativer Radius $r \sim m^{1/2}$		1	
Temperatur [K] $T \sim m^{1/2}$		5800	
relative Leuchtkraft $L \sim m^3$		1	
Hauptreihenzeit in Jahren $t_h \sim 1/m^2$		$11 \cdot 10^9$	

Tab. 9: Beispiele zu wichtigen Sterneigenschaften, die von der Masse abhängig sind.

Der Tod der Sterne

A25 a Schätze die Dichte eines Atomkerns ab. Nimm dazu exemplarisch ein Proton ($1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg), also einen Wasserstoffkern, und verwende die Gleichung für den Radius eines Atomkerns: $r \approx 1{,}2 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{rel\ Atomgewicht}$ m.

A25 b Neutronensterne haben Dichten, die um die Größenordnung 10^{17} kg/m³ liegen. Was kann man daraus schließen? Hilf dir mit der Antwort auf A25 a.

A25 c Schätze ab, welche Masse ein Würfel von 1 mm³ Neutronenstern hätte. Womit kann man das vergleichen?

A26 In Abb.16 siehst du eine Simulation eines masselos angenommenen Begleitsterns (rot) hinter einem Neutronenstern (blau). Geometrie und Farbgebung der dargestellten Szene sind astrophysikalisch völlig unrealistisch - in dieser Nähe zum Neutronensterns wäre ein Begleiter nicht stabil. Sie wurde so gewählt, dass der Effekt deutlich zu sehen ist. Wie kannst du diesen Effekt qualitativ erklären? Verwende für deine Erklärung auch Abb. 17.

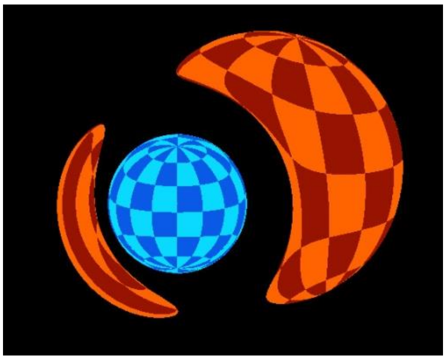

Abb. 16 (Bild: Corvin Zahn, Institut für Physik, Universität Hildesheim, Tempolimit Lichtgeschwindigkeit (www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de))

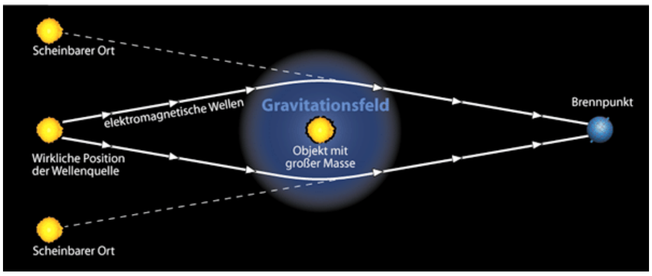

Abb. 17: Schematische Darstellung der Wirkungsweise einer Gravitationslinse (Quelle: Wikipedia).

A27 Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit vom Rand der Sonne ($M = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $r = 7 \cdot 10^5$ km)? Verwende das Ergebnis aus A1 und den Wert $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻²! Vergleich mit der Fluchtgeschwindigkeit von der Erde ($M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, r = 6370 km).

A28 Die Fluchtgeschwindigkeit, um der Gravitation einer Masse zu entkommen, ist proportional zu $1/\sqrt{r}$ (siehe A1). Je näher man also einer Masse kommt, desto größer wird die Fluchtgeschwindigkeit. Bei einem bestimmten Abstand r gilt $v = c$. Dann kann nicht einmal mehr das Licht entkommen. Diesen Abstand nennt man den Schwarzschildradius R_S. Leite die Gleichung für R_S mit Hilfe der Antwort auf A1 ab.

A29 a Berechne allgemein die kritische Dichte ρ_C, ab der eine kugelförmige Masse zu einem schwarzen Loch zusammenstürzt. Verwende dazu die Gleichungen $V_{Kugel} = \frac{4r^3\pi}{3}$, $\rho = \frac{M}{V}$ und die Gleichung für den Schwarzschildradius aus A28.

A29 b Erstelle mit Hilfe der Gleichung aus A29 a ein Diagramm, in dem du auf der x-Achse die Masse und auf der y-Achse die kritische Dichte eines Schwarzen Lochs einträgst.

Interpretiere das Diagramm! Zeichne in das Diagramm weiters diese vermutete Masse (10^{54} kg) und Dichte (10^{-26} kg/m^3) des sichtbaren Universums ein. Was ist das Interessante dabei?

A30 Ist die Aussage "Schwarze Löcher haben deshalb eine so verheerende Wirkung, weil ihre Masse so groß ist!" richtig oder falsch? Was würde passieren, wenn die Sonne plötzlich bei gleicher Masse ein Schwarzes Loch wäre (was natürlich nicht passieren kann)? Würde es die Erde und alle andern Planeten verschlingen? Begründe mit Hilfe von Abb. 18 und dem Newton'schen Gravitationsgesetz $F_G = G\frac{mM}{r^2}$.

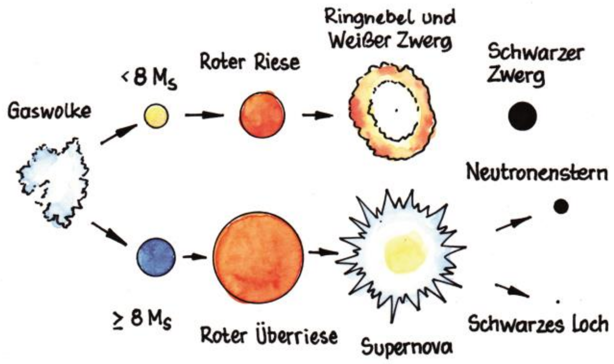

Abb. 18: Die drei möglichen Endstadien der Sterne. Rote Zwerge werden direkt Weiße Zwerge, ohne vorher Rote Riesen gewesen zu sein. Hat ein Stern über 8 Sonnenmassen, so endet sein Leben sehr spektakulär mit einer Supernova und kann dann zu einem Schwarzen Loch werden. Die leichtesten stellaren (also aus Sternen entstandenen) Schwarzen Löcher haben vermutlich um 4 Sonnenmassen (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 48.17, S. 96).

A31 a Was versteht man allgemein unter einer Gezeitenkraft? Erkläre mit Hilfe von Abb. 19! Welcher Zusammenhang besteht zu Abb. 6?

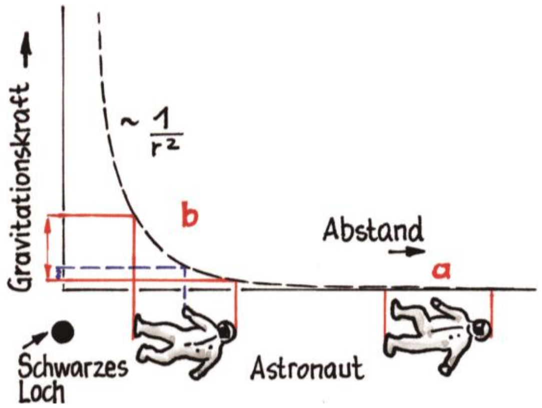

Abb. 19: Der Unterschied der Gravitationskräfte, die auf Kopf und Füße eines Astronauten in der Nähe eines Schwarzen Lochs einwirken (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 10.28, S.105, BB5).

A31 b Versuche eine allgemeine Formel für die Gezeitenbeschleunigung abzuleiten. Gehe dazu vom Gravitationsgesetz $F_G = G\frac{mM}{r^2}$ aus. Bedenke, dass die Teile eines Objekts, die sich näher bei der Zentralmasse befinden, auch stärker angezogen werden. Nimm für die Abstände r und $(r - \Delta r)$, wobei Δr die Größe des Objekts darstellt. Für deine Ableitung brauchst du folgende Reihenentwicklung ($\Delta r << r$): $\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} = 1 + 2\Delta r/r + 3(\Delta r/r)^2 \ldots$.

A32 a Berechne zunächst den Schwarzschildradius eines Schwarzen Lochs mit 10 Sonnenmassen bzw. 4,3 Millionen Sonnenmassen. Ersteres kann durch eine Supernova am Ende des Lebens eines massereichen Sterns entstehen (siehe Abb. 18), zweiteres wird im Zentrum unserer Milchstraße vermutet. Verwende die Formel für den Schwarzschildradius aus A28. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt etwa $3 \cdot 10^8$ m/s, die Sonnenmasse rund $2 \cdot 10^{30}$ kg und $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}.

A32 b Gib einen Tipp ab, welche Gezeitenbeschleunigung ein Astronaut maximal aushalten kann, wenn er mit Kopf oder Füßen in Richtung Schwarzes Loch fällt, ohne dass er auseinander gerissen wird. Natürlich bist du hier auf eine wirkliche Vermutung angewiesen!

A32 c Schätze nun die Gezeitenbeschleunigung ab, die auf einen Astronauten wirkt, wenn er mit den Füßen zuerst in die in A32 a erwähnten Schwarzen Löcher fällt. Überlege, in welchem Abstand vom Schwarzen Loch die kritische Gezeitenbeschleunigung (A32 b) erreicht wird. Vergleich dein Ergebnis mit dem Schwarzschildradius.

A32 d Es wurde schon viel darüber spekuliert, ob man zwei Schwarze Löcher zur Reise durchs All verwenden könnte, wenn sie durch ein so genanntes Wurmloch in Verbindung stünden (Abb. 20). Dieses könnte ein Abkürzer durch den Raum sein, weil sich dieser in der Nähe von Schwarzen Löchern unendlich stark krümmt. Damit ein Astronaut unbeschadet durch ein Wurmloch fliegen kann, muss er aber den Schwarzschildradius durchqueren können, ohne auseinander gerissen zu werden. Ist das bei unseren beiden Schwarzen Löchern der Fall?

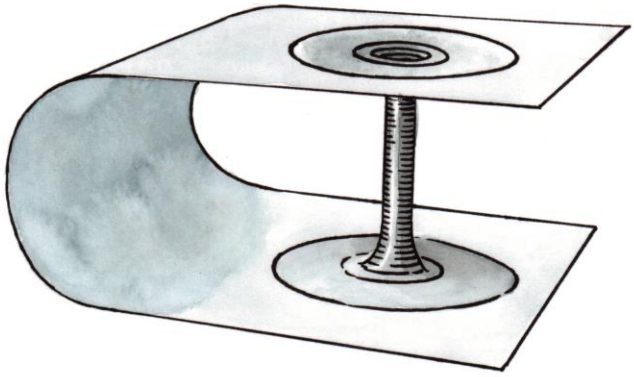

Abb. 20: Ein Wurmloch ist die Abkürzung durch eine höhere Dimension. Dadurch könnte man – rein theoretisch – Abkürzer im Raum erzeugen (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 13.29).

A32 e Schätze allgemein ab, wie groß die Masse eines Schwarzen Lochs sein muss, damit man am Schwarzschildradius *nicht* „spaghettisiert" wird und unbeschadet durch das Wurmloch fliegen kann. Nimm dazu an, dass die Gezeitenbeschleunigung am Schwarzschildradius maximal 10 *g* betragen darf (siehe A32 b) und drücke das Ergebnis in Sonnenmassen ($2 \cdot 10^{30}$ kg) aus.

A33 Um das Zentrum der Galaxie M87 rotiert ein Gasnebel. Wenn sich dieser von der Erde wegbewegt, ist das Spektrum rotverschoben (Maximum bei 501,5 nm), wenn er sich auf die Erde zu bewegt, ist es blauverschoben (499,8 nm; Abb. 21).

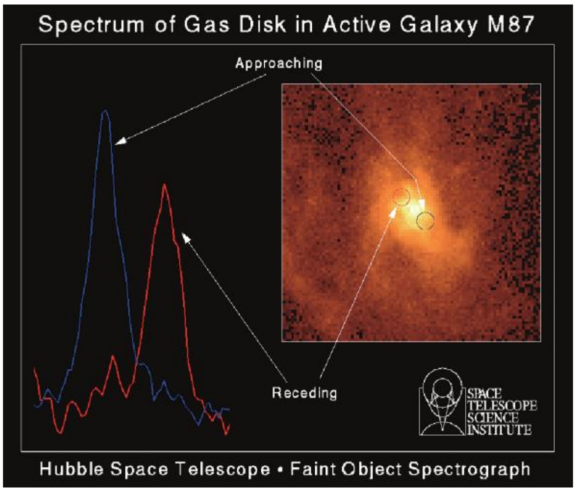

Abb. 21 (Quelle: NASA)

a Angenommen, die Wellenlänge nimmt im gleichen Ausmaß zu und ab. Wie groß wäre dann die Ruhewellenlänge λ_R?

b Berechne nun mit Hilfe des Ergebnisses von A33 a der Gleichung für den relativistischen Dopplereffekt $\frac{f_B}{f_Q} = \sqrt{\frac{(1+v_{BQ}/c)}{(1-v_{BQ}/c)}} = x$ (v_{BQ} ist dabei die Relativgeschwindigkeit zwischen Beobachter und Quelle) die maximale Annäherungsgeschwindigkeit (= Tangentialgeschwindigkeit) des Nebels. Es gilt $f = c/\lambda$.

c Die in A33 b berechnete Geschwindigkeit ist jene, mit der sich der Nebel um das Zentrum bewegt. Damit er eine Kreisbahn beschreiben kann, muss die Gravitationskraft $F_G = G\frac{mM}{r^2}$ die nötige Zentripetalkraft $F_{ZP} = \frac{mv^2}{r}$ liefern (siehe Kap. 13.1, BB6). Leite daraus eine Formel für die Größe der Zentralmasse *M* ab, wenn alle anderen Werte bekannt sind.

d Der Radius der rotierenden Gasscheibe beträgt an der beobachteten Stelle 100 Lichtjahre, also $9{,}46 \cdot 10^{17}$ m. Die Gravitationskonstante *G* beträgt $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}. Wie groß ist daher die Masse innerhalb des Nebels? Vergleiche mit der Masse der Sonne von etwa $2 \cdot 10^{30}$ kg. Was kann man daraus schließen?

Hilfe zu A1: Damit ein Objekt die Anziehungskraft einer Zentralmasse überwinden kann, muss seine Geschwindigkeit so groß sein, dass es erst im Unendlichen zum Stillstand kommt. Dabei wird die kinetische Energie in potenzielle umgewandelt. Man kann daher beide Gleichungen gleichsetzen $W_H = E_p = mGM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right) = E_k = \frac{mv^2}{2}$. Im Unendlichen wird $\frac{1}{r_n} = 0$. Nun kann man nach v auflösen: $GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right) = GM\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{GM}{r} = \frac{v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$.

Hilfe zu A2 a: Damit das geschieht, muss die Geschwindigkeit der Moleküle, die diese auf Grund ihrer Temperatur besitzen, kleiner sein als die Fluchtgeschwindigkeit. Dazu sind niedrige Temperaturen notwendig und vor allem riesige Massen.

Hilfe zu A2 b: Gasmoleküle haben eine mittlere kinetische Energie von $E_k = \frac{3}{2}kT = \frac{mv^2}{2}$. Damit die Wolke unter der Gravitation kollabieren kann, muss diese kleiner sein als $\frac{mv_F^2}{2}$. Für die Fluchtgeschwindigkeit gilt wiederum $v_F = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ (siehe A1). Man kann daher schreiben $E_k = \frac{3}{2}kT = \frac{mv^2}{2} < \frac{mv_F^2}{2} = \frac{m\frac{2GM}{r}}{2} = \frac{GmM}{r}$ bzw. $\frac{3}{2}kT < \frac{GmM}{r}$ und dann nach M auflösen: $M > \frac{3rkT}{2Gm}$.

Hilfe zu A2 c: Es gilt $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4r^3\pi}{3}$. Durch Umformen erhält man $r^3 = \frac{3M}{4\pi\rho}$ und $r = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}}$.

Hilfe zu A2 d: Es gilt $M > \frac{3rkT}{2Gm}$ (A2 b). Weiters gilt für kugelförmige Massen $r = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}}$ (A2 c). Daher folgt $M > \frac{3rkT}{2Gm} = \frac{3kT}{2Gm}\sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}}$, weiters $M^3 > \left(\frac{3kT}{2Gm}\right)^3 \frac{3M}{4\pi\rho}$ und $M^2 > \left(\frac{3kT}{2Gm}\right)^3 \frac{3}{4\pi\rho}$ und schließlich $M > \sqrt{\left(\frac{3kT}{2Gm}\right)^3 \frac{3}{4\pi\rho}}$.

Hilfe zu A3 a: Interstellare Materie besteht aus Wasserstoffgas (H_2), und ein einzelnes Molekül hat daher etwa die doppelte Protonenmasse, also etwa $3{,}3 \cdot 10^{-27}$ kg. Das entspricht dem Wert *m* in der Gleichung. Wenn du die anderen bekannten Daten einsetzt, erhältst du $M > \sqrt{\left(\frac{3kT}{2Gm}\right)^3 \frac{3}{4\pi\rho}} = 1{,}44 \cdot 10^{34}$ kg. Wenn du dieses Ergebnis in $r = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}}$ einsetzt, erhältst du etwa $1{,}5 \cdot 10^{18}$ m.

Hilfe zu A3 b: Die Masse von $1{,}44 \cdot 10^{34}$ kg entspricht $1{,}44 \cdot 10^{34}$ kg/($2 \cdot 10^{30}$ kg) ≈ 7200 Sonnenmasse. Ein Jahr hat 60·60·24·365 s = $3{,}15 \cdot 10^7$ s. Ein Lichtjahr entspricht somit der Strecke von $s = c \cdot t \approx 9{,}5 \cdot 10^{15}$ m. Die interstellare Wolke hat daher einen Radius von etwa 160 Lichtjahren.

Hilfe zu A4 a: Es gilt $r = \frac{g}{2}t^2$ und daher $t = \sqrt{\frac{2r}{g}}$.

Hilfe zu A4 b: Weil die Gewichtskraft durch die Gravitationskraft zu Stande kommt, kann man beide Formeln gleichsetzen, durch m kürzen und erhält $g = G\frac{M}{r^2}$.

Hilfe zu A4 c: Wenn du in $t = \sqrt{\frac{2r}{g}}$ für $g = G\frac{M}{r^2}$ einsetzt, erhältst du $t = \sqrt{\frac{2r}{\frac{GM}{r^2}}} = \sqrt{\frac{2r^3}{GM}}$.

Hilfe zu A4 d: Der Radius einer Wolke, die gerade groß genug ist, um zu kollabieren, ist $1{,}5 \cdot 10^{18}$ m und ihre Masse beträgt $1{,}44 \cdot 10^{34}$ kg (siehe A3 a). Wenn du die bekannten Werte in die Gleichung aus A4 c einsetzt, erhältst du $2{,}7 \cdot 10^{15}$ s. Ein Jahr hat 60·60·24·365 s = $3{,}15 \cdot 10^7$ s. Die Kontraktionszeit beträgt daher $84 \cdot 10^6$ oder 84 Millionen Jahre.

Hilfe zu A5: Wenn sich die Gaswolke zusammenzieht, dann sinkt die potenzielle Energie der Teilchen, es wird also quasi Gravitationsenergie freigesetzt. Dadurch steigt nach dem Energieerhaltungssatz die kinetische Energie der Teilchen an. Zunächst bewegen sich die Teilchen vor allem auf das Zentrum der Wolke zu. Weil sie aber durch die Kontraktion immer weniger Platz haben und immer häufiger aufeinander prallen, wird diese kinetische Energie in ungeordnete kinetische Energie umgewandelt, also in Wärme. Der Kollaps kommt dann zum Stillstand, wenn der Druck im Inneren des Sterns so groß geworden ist, dass er der Gravitation standhalten kann.

Hilfe zu A6: Die Bahnen der Planeten liegen praktisch in einer Ebene. Die höchste Abweichung hat der Merkur mit 7°, aber auch diese ist sehr gering. Außerdem rotieren alle Planeten in dieselbe Richtung. Hätte die Sonne die Planeten später eingefangen, dann würden diese völlig durcheinander die Sonnen umkreisen. Die Eigendrehung der Planeten erfolgt ebenfalls gegen den Uhrzeigersinn. Es gibt aber zwei Ausnahmen: Die Neigung der Venus beträgt 177,4°, das heißt sie steht praktisch Kopf und rotiert in die Gegenrichtung. Die Achse des Uranus ist um 97,8° gekippt, er "rollt" also gewissermaßen auf seiner Bahn. Die Ursachen sind unbekannt. Man nimmt aber an, dass diese beiden Planeten mit irgendwelchen Brocken kollidiert sind.

Hilfe zu A7 a: Es ist ähnlich wie mit dem Druck in unserer Atmosphäre. Je tiefer man hinunterkommt, desto mehr Schichten liegen oberhalb und desto größer wird der Druck. Weil sich Gase sehr gut komprimieren lassen, steigt dadurch natürlich auch die Dichte an. Es gibt aber einen Unterschied. Im Inneren der Sonne sinkt die Gravitation ab und geht in der Mitte gegen Null - dort wird man ja in alle Richtungen gleich stark angezogen. Daher hat die Kurve einen Wendepunkt und die Druck- und Dichtezunahme sinkt wieder ab, bevor man in der Mitte angelangt ist.
Der Normaldruck auf der Erde beträgt etwa 1 bar (siehe Tab. 10). Im Inneren der Sonne herrscht daher ein Druck, der etwa 250 Milliarden mal größer ist als in unserer Atmosphäre. Eigentlich sollte man den Druck in der SI-Einheit hPa angeben (1 bar = 1000 hPa).

Druckeinheit	Normaldruck
Pascal (Pa) = 1 N/m^2	101.300 Pa = 1013 hPa
Bar (bar)	1,013 bar
Millibar (mbar)	1013 mbar
Torricelli (torr oder mmHg)	760 Torr
Physikalische Atmosphären (atm)	1 atm

Tab. 10: Das Pascal ist eine SI-Einheit. Das Bar basiert auf cm, s und g und wird meistens beim Reifendruck verwendet. 1 Torricelli entspricht dem Druck einer Quecksilbersäule mit 1 mm. Diese Einheit wird in der Medizin verwendet, etwa bei der Blutdruckmessung. Ein hPa ist gleich einem mbar.

Hilfe zu A7 b: Zuerst musst du die Einheit g/cm^3 in kg/m^3 umrechnen. Ein Gramm entspricht 10^{-3} kg. Ein m^3 hat $(100)^3$ cm, also $(10^2)^3$ cm^3 = 10^6 cm^3. Daher entspricht 1 cm^3 10^{-6} m^3. Die Umrechnung lautet daher 1 g/cm^3 =
10^{-3} kg/10^{-6} m^3 = 10^3 kg/m^3. Die Angabe der Dichte in Abb. 3 muss also noch mit 1000 multipliziert werden. Die Dichte im Inneren der Sonne beträgt also etwa 160.000 kg/m^3. Gold hat eine Dichte von 19.320 kg/m^3. Das Innere der Sonne ist also etwa 8-mal so dicht wie Gold - obwohl es ein Gas ist!

Hilfe zu A8: Das Licht eines dünnen Gases, zum Beispiel in einer Leuchtstoffröhre, zeigt beim Aufspalten ein Linienspektrum. Dieses ist quasi sein „Fingerabdruck". Was passiert aber, wenn man das Licht eines leuchtenden Gasballs wie der Sonne oder eines beliebigen anderen Sterns aufspaltet? Dann erhält man ein kontinuierliches Spektrum! Wie kann das sein? Der Druck im Inneren eines Sterns ist unvorstellbar groß (siehe A7). Dadurch ist auch die Gasdichte extrem hoch. Während in einem dünnen Gas die Orbitale unbeeinflusst sind, werden sie durch den hohen Druck quasi „gequetscht" (Abb. 22). Dadurch entstehen völlig neue Energieniveaus, und das Gas leuchtet in allen Farben. Unter hohem Druck geht also der „Fingerabdruck" des Gases verloren – es verliert seine Persönlichkeit.

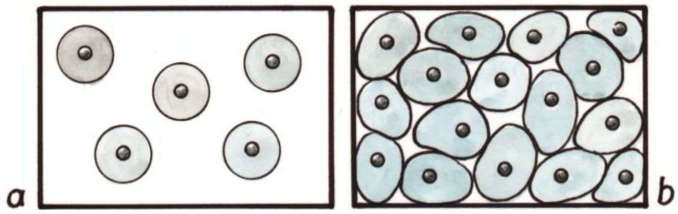

Abb. 22: Schematische Darstellung der Orbitale von Gasatomen. a) Geringer Druck: Die Orbitale sind unbeeinflusst. b) Hoher Druck: Es kommt zu einer gegenseitigen Beeinflussung der Orbitale. Dadurch entstehen viele neue Energieniveaus, die ein kontinuierliches Spektrum ermöglichen (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 28.8, S. 31, BB7).

Planet	Umlaufzeit [a]	5000 a/Umlaufzeit
Merkur	0,2408467	20760,0935
Venus	0,6151973	8127,47390
Erde	1	5000
Mars	1,8808476	2658,37594
Jupiter	11,862615	421,492226
Saturn	29,447498	169,793712
Uranus	84,016846	59,5118746
Neptun	164,79132	30,3414039

Tab. 11 zu A9 a

Planet	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
Merkur	1	0,391	0,241	0,128	0,020	0,008	0,003	0,001
Venus	2,554	1	0,615	0,327	0,052	0,021	0,007	0,004
Erde	4,152	1,625	1	0,532	0,084	0,034	0,012	0,006
Mars	7,809	3,057	1,881	1	0,159	0,064	0,022	0,011
Jupiter	49,254	19,283	11,863	6,307	1	0,403	0,141	0,072
Saturn	122,267	47,867	29,447	15,657	2,482	1	0,350	0,179
Uranus	348,840	136,569	84,017	44,670	7,082	2,853	1	0,510
Neptun	684,217	267,867	164,791	87,615	13,892	5,596	1,961	1

Tab. 12 zu A9 a: Verhältnisse der Umlaufzeiten zwischen jeweils zwei Planeten

Hilfe zu A9 a: Nehmen wir an, die Planeten würden alle 5000 Jahre in einer Reihe liegen. Wenn das so wäre, dann müsste die Zahl 5000 ein ganzzahliges Vielfaches der Planetenumlaufbahnen sein. Tabelle 11 zeigt aber, dass das nicht der Fall ist. Generell müssten, wenn es zu einer zyklisch wiederkehrenden Linearkonstellation kommt, die Umlaufzeiten von jeweils zwei Planeten in einem ganzzahligen Verhältnis stehen. Tabelle 12 (vorige Seite) zeigt, dass das ebenfalls nicht der Fall ist.

Hilfe zu A9 b: Die Bahn eines ungestörten Planeten hängt von seiner Geschwindigkeit und der Masse des Zentralgestirns ab. In Abb. 5 b und d nähert sich der kleine Planet aber jeweils einem der beiden großen. Dadurch wirkt auf ihn nicht nur die Gravitation des Sterns, sondern auch die eines der großen Planeten, was zu einer Bahnablenkung führt. Stünden die Umlaufzeiten in ganzzahligem Verhältnis, würden sich die Planeten regelmäßig treffen und der Effekt würde sich so lange aufschaukeln, bis der Planet aus seiner Bahn geworfen wird.
Aus ähnlichem Grund gibt es Lücken in den Saturnringen (Abb. 6). Sie entstehen dort, wo die entsprechenden Umlaufszeiten der Gesteinsbrocken in einem ganzzahligen Verhältnis zur Umlaufsdauer eines großen Saturnmondes stehen. Sollte sich doch einmal ein Brocken dorthin verirren, fliegt er nach einiger Zeit wieder raus.

Hilfe zu A10: Im Inneren der Sonne herrschen eine Temperatur von 16 Millionen Kelvin und ein Druck von einigen hundert Milliarden Atmosphären. Trotz der extremen Bedingungen ist die Sonne im Inneren zu kalt, die kinetische Energie der Kerne also zu gering, dass nach der klassischen Theorie eine Fusion ablaufen könnte. Den entscheidenden Beitrag liefert der Tunneleffekt. Du verdankst dein Leben also unter anderem einem quantenmechanischen Phänomen.

Hilfe zu A11: Der Tunneleffekt ist eine direkte Folge der Energieunschärfe. Das Quant kann sich für einen kurzen Zeitraum Δt die fehlende Energie ΔE ausleihen, um über den Energieberg zu kommen. Letztlich wirkt es aber so, als hätte das Quant den Berg durchtunnelt.
Eine andere Argumentation erfolgt mit Hilfe der Wellenfunktion. Diese sinkt nämlich beim Hindernis nicht auf null ab (siehe Abb. 7) und kann daher bis hinter das Hindernis reichen. Das bedeutet, dass es auch eine gewisse Wahrscheinlichkeit gibt, dass das Quant durch das Hindernis tunnelt. Dieser Effekt liegt bei der Fusion in der Sonne vor (Abb. 8; siehe auch A10). Die Protonen in der Sonne nähern sich nur auf etwa 10^{-12} m an. Die Kernkraft wirkt aber erst ab 10^{-15} m. Trotzdem gibt es eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass das Proton den Energieberg durchtunnelt.

Hilfe zu A12: Wie ist es rein prinzipiell möglich, dass Atomkerne fusionieren? Diese sind ja positiv geladen und stoßen einander daher ab! Damit eine Fusion möglich ist, müssen die Kerne extrem hohe kinetische Energien aufweisen. Nur dann kommen sie bei Stößen nahe genug, dass sie von der Kernkraft eingefangen und fusioniert werden. Die Kernkraft wird aber durch die starke Wechselwirkung verursacht, und diese hat wiederum nur eine Reichweite von etwa 10^{-15} m. So nahe müssten die Kerne ohne Tunneleffekt kommen, damit die starke Wechselwirkung wirksam wird.

Hilfe zu A13 a: Je kleiner die Energie der Protonen, desto kleiner ist auch die Tunnelwahrscheinlichkeit. Warum? Weil sich dann die Teilchen auf Grund der abstoßenden elektrischen Kraft nicht so stark nähern können. Wenn die Energie etwa von 5,8 auf 2,9 keV absinkt, sich also halbiert, halbiert sich auch der Abstand x, auf den sich die Protonen nähern können. Die Tunnelwahrscheinlichkeit sinkt dabei aber nicht auch auf die Hälfte ab, sondern etwa um einen Faktor 10^{-5}. Die Tunnelwahrscheinlichkeit hängt also sehr sensibel vom erreichten Abstand der Protonen ab.

Hilfe zu A13 b: Die Tunnelwahrscheinlichkeit liegt dann bei $9 \cdot 10^{-7} \approx 10^{-6}$. Nur rund jedes millionste Proton kann daher durchtunneln. Oder umgekehrt gesagt: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Proton in diesem Abstand tunnelt, liegt bei einem Millionstel.

Hilfe zu A13 c: Weil die Tunnelwahrscheinlichkeit viele Größenordnungen umfasst, muss die y-Achse logarithmisch dargestellt werden.

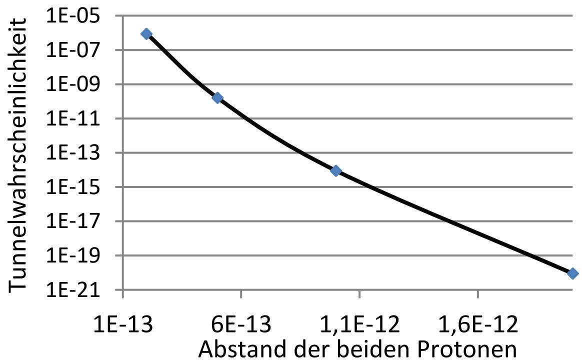

Abb. 23: Grafische Darstellung von Tabelle 6
(Grafik: Martin Apolin)

Hilfe zu A14 a: Erstens kann man aus dem Diagramm herauslesen, dass die Geschwindigkeit der Moleküle mit zunehmender Temperatur größer wird. Wärme bedeutet ja ungeordnete Bewegung der Teilchen. Je höher die Temperatur, desto größer die Wärme, desto heftiger wird die Teilchenbewegung. Zweitens sieht man, dass sich nicht alle Gasteilchen mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen.

Das ist durch nichtzentrale Zusammenstöße zu erklären, bei denen manche Teilchen abgebremst und manche beschleunigt werden, ähnlich wie beim Billardspiel. Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist deshalb nicht beim Maximum der Kurve, weil die Kurve nicht symmetrisch ist - es gibt etwas mehr schnellere Teilchen.

Hilfe zu A14 b: Die Geschwindigkeitsverteilung der Protonen entspricht dem rechten Teil der Kurve in Abb. 9. In Abb. 10 ist allerdings nicht die Geschwindigkeit aufgetragen, sondern die Energie in Elektronvolt. Tabelle 6 zeigt, dass mit zunehmender Energie die Fusionswahrscheinlichkeit sehr stark anwächst. Das entspricht der rechten strichlierten Kurve mit der Beschriftung Tunneleffekt.
Protonen mit geringerer Geschwindigkeit und somit Energie sind viel häufiger vorhanden, allerdings ist dann auch die Wahrscheinlichkeit geringer, dass sie tunneln. Protonen mit höherer Geschwindigkeit und Energie sind viel weniger vorhanden, allerdings ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie tunneln, wesentlich größer. Beim Gamow-Peak treffen beide Wahrscheinlichkeiten so zusammen, dass die Fusionsrate am größten ist.

Hilfe zu A15: In der Abbildung steht über dem Diagramm "Energiegewinnung". Nach dem Energieerhaltungssatz kann Energie jedoch niemals gewonnen oder vernichtet werden, sie kann nur in eine andere Form umgewandelt werden. Daher sollte man den Begriff "Energiegewinnung" auch nicht verwenden. In den späteren Auflagen war daher "Energiefreisetzung" zu lesen.

Hilfe zu A16 a: Die Sonne hat eine Leistung von $3{,}9 \cdot 10^{26}$ W bzw. J/s. Es müssen daher pro Sekunde sagenhafte $3{,}9 \cdot 10^{26}$ J/$4{,}2 \cdot 10^{-12}$ J = $9{,}3 \cdot 10^{37}$ Reaktionen wie in Abb. 17 dargestellt ablaufen. Deshalb entstehen pro Sekunde in der Sonne $1{,}86 \cdot 10^{38}$ Neutrinos.

Hilfe zu A16 b: Die Oberfläche einer Kugel berechnet man mit $O = 4r^2\pi$. Weil wir die Oberfläche in Quadratzentimetern haben wollen, rechnen wir die Entfernung gleich vorher um: 150 Milliarden Meter = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m = $1{,}5 \cdot 10^{13}$ cm. Das ergibt eine Kugeloberfläche von etwa $2{,}8 \cdot 10^{27}$ cm^2. In Summe fliegen $1{,}86 \cdot 10^{38}$ Neutrinos/s durch die gesamte Kugeloberfläche und daher
$1{,}86 \cdot 10^{38}$ Neutr./$2{,}8 \cdot 10^{27}$ cm$^2 \approx 6{,}6 \cdot 10^{10}$ Neutrinos/cm^2.

Hilfe zu A17 a: Die Sonne strahlt mit einer Leistung von $3{,}9 \cdot 10^{26}$ W bzw. J/s (siehe Angabe zu A16 a). Die pro Sekunde abgestrahlte Energie von $3{,}9 \cdot 10^{26}$ J entspricht nach $m = E/c^2$ $3{,}9 \cdot 10^{26}$ J/($9 \cdot 10^{16}$ m^2/s^2) = $4{,}3 \cdot 10^9$ kg.

Hilfe zu A17 b: Wasser hat eine Dichte von rund 1000 kg/m^3. Weiters gilt $\rho = m/V$ und daher $V = m/\rho$. Das Volumen des Wasserwürfels beträgt daher $4{,}3 \cdot 10^9$ kg/(1000 kg/m^3) = $4{,}3 \cdot 10^6$ m^3. Es gilt $V = a^3$ und daher $a = \sqrt[3]{V} \approx 163$ m. Die Seitenlänge des Wasserwürfels beträgt daher 163 m.

Hilfe zu A17 c: Nehmen wir vereinfacht an, dass die Sonne mit gleicher Leistung weiterbrennt. Sie befindet sich 11 Milliarden Jahre auf der Hauptreihe, ist also in dieser Zeit ein "normaler" Stern, bevor sie ein Roter Riese wird. 11 Milliarden Jahre entsprechen etwa $3{,}5 \cdot 10^{17}$ s. Der Massenverlust macht in Summe also $4{,}3 \cdot 10^9$ kg/s$\cdot 3{,}5 \cdot 10^{17}$ s = $1{,}5 \cdot 10^{27}$ kg aus. Das entspricht über den Daumen trotzdem nur etwa 1/1000 der aktuellen Sonnenmassen, also 1 ‰. Die Sonne ist so massenreich, dass sie der enorme Massenverlust also wenig kitzelt.

Hilfe zu A18 a: Die Sonne ist rund 4,6 Milliarden Jahre alt. Weil sie auf Grund ihrer Masse etwa 11 Milliarden Jahre auf der Hauptreihe verweilt, wird sie also noch etwa 6,5 Milliarden Jahre weiterbrennen und sicher nicht bereits im Jahr 2057 verlöschen. Über das Leben und Sterben von Sternen weiß man sehr gut Bescheid, weil es in unserer Heimatgalaxis jede Menge davon zu sehen gibt (etwa 100 Milliarden), und man ihre jeweiligen Stadien sehr gut studieren kann. Die Sonne bläht sich übrigens in den nächsten Milliarden Jahren auf. Dadurch wird es auf der Erde nicht kälter, sondern wärmer. In rund 1 Milliarde Jahren wird die durchschnittliche Temperatur auf der Erde auf 30 °C gestiegen sein und in 2 Milliarden Jahren sogar auf 100° C.

Hilfe zu A18 b: Das Volumen der Bombe würde $22.000 \cdot 3000 \cdot 1000$ m^3 = $6{,}6 \cdot 10^{10}$ m^3 betragen. Das würde eine Uran-Masse von $6{,}6 \cdot 10^{10}$ m$^3 \cdot 19160$ kg/m$^3 \approx$ $1{,}3 \cdot 10^{15}$ kg. Die Weltreserven von Uran liegen bei etwa $1{,}8 \cdot 10^6$ t oder $1{,}8 \cdot 10^9$ kg Uran. Weil man für den Bau der Bombe aber U-235 benötigt, wäre somit $1{,}8 \cdot 10^9 \cdot 0{,}0072$ kg = $1{,}3 \cdot 10^7$ kg davon vorrätig. Man liegt also um den Faktor 10^8 daneben - man bräuchte 100 Millionen mal mehr U-235 für diese Bombe, als auf der Erde vorhanden.

Hilfe zu A19: Sterne sind beinahe perfekte Schwarze Strahler. Ihr Spektrum kommt praktisch ausschließlich durch ihre

Temperatur zu Stande, und sie erzeugen kontinuierliche Spektren (siehe auch A8). Leuchtstoffröhren hingegen erzeugen Linienspektren. Diese sind keine Folge ihrer Temperatur, sondern beruhen einfach auf den möglichen Quantensprüngen innerhalb der Atome. Deshalb können sie, auch wenn sie kühl sind, blau leuchten.

Hilfe zu A20: Die Farben kommen praktisch ausschließlich durch die Oberflächentemperatur der Sterne zu Stande. Mit freiem Auge kann man diese, außer bei sehr hellen Sternen, jedoch nicht sehen. Das liegt daran, dass Sterne so schwach leuchten, dass nur die Stäbchen in der Netzhaut aktiviert werden, mit denen wir aber nur schwarz/weiß sehen können.

Hilfe zu A21: Nicht jeder schwarze Gegenstand muss zwangsläufig auch ein Schwarzer Körper im Sinne des physikalischen Fachbegriffs sein. Es kann zum Beispiel sein, dass das Objekt zwar im sichtbaren Wellenlängenbereich die Strahlung sehr gut absorbiert, im Infraroten aber schlecht. In diesem Fall wäre das Objekt schwarz, aber kein Schwarzer Strahler. Umgekehrt können aber nicht schwarze Objekte in sehr guter Näherung Schwarze Strahler sein. Das trifft zum Beispiel auf alle Sterne zu.

Hilfe zu A22: Die Farbe der Sonne hängt ausschließlich von ihrer Oberflächentemperatur ab, die wiederum eine Folge der Kernfusion tief im Inneren ist. Das Licht des Scheinwerfers wird, wie das eben Schwarze Strahler machen, vollkommen absorbiert. Es ändert aber an der Oberflächentemperatur nichts und somit auch nicht an der Farbe der Sonne.

Hilfe zu A23 a: Wenn man rT/m = konstant umformt, erhält man $r^2T^2 \sim m^2$. Die Strahlungsleistung I im Gesetz von STEFAN und BOLTZMANN ist nichts anderes als die Leuchtkraft L. Man kann also auch schreiben $L \sim AT^4 \sim r^2T^4 \sim r^2T^2T^2$ und wenn man $r^2T^2 \sim m^2$ berücksichtigt
$L \sim m^2T^2$. Wenn man weiters $L \sim m^3$ einsetzt, erhält man $m^3 \sim m^2T^2$ und somit $T^2 \sim m$ bzw. $T \sim m^{1/2}$.

Hilfe zu A23 b: Aus $rT \sim m$ folgt zunächst $r \sim m/T$ und mit der Temperatur-Masse-Beziehung $T \sim m^{1/2}$ ergibt sich für die Radius-Masse-Beziehung $r \sim m/m^{1/2} \sim m^{1/2}$.

Hilfe zu A23 c Die Zeit, die ein Stern auf der Hauptreihe verweilt (t_h), ist proportional zum "Brennstoffvorrat", also zur Masse. Es gilt daher $t_h \sim m$. Die Hauptreihenzeit ist aber auch indirekt proportional zum "Brennstoffverbrauch" und somit zur Leuchtkraft L. Daraus folgt
$t_h \sim m/L \sim m/m^3 \sim 1/m^2$.

Hilfe zu A24:

	Blauer Riese	Sonne	Roter Zwerg
relative Masse m	30	1	0,3
relativer Radius $r \sim m^{1/2}$	$\sqrt{30} \approx 5{,}5$	1	$\sqrt{0{,}3} \approx 0{,}55$
Temperatur [K] $T \sim m^{1/2}$	$\sqrt{30} \cdot 5800 \approx 32000$	5800	$\sqrt{0{,}3} \cdot 5800 \approx 3200$
relative Leuchtkraft $L \sim m^3$	$30^3 = 27.000$	1	$0{,}3^3 = 0{,}027$
Hauptreihenzeit in Jahren $t_h \sim 1/m^2$	$\frac{1}{30^2} \cdot 11 \cdot 10^9 \approx 12 \cdot 10^6$	$11 \cdot 10^9$	$\frac{1}{0{,}3^2} \cdot 11 \cdot 10^9 \approx 122 \cdot 10^9$

Tab. 13

Hilfe zu A25 a: Wasserstoff hat das Atomgewicht 1 und daher gilt $r \approx 1{,}2 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{1}\,\mathrm{m} = 1{,}2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$. Das Proton hat ein Volumen von $V = \frac{4r^3\pi}{3}$. Wenn du den Radius des Protons einsetzt, erhältst du für das Volumen $7{,}2 \cdot 10^{-45}\,\mathrm{m}^3$. Dichte ist Masse pro Volumen und daher $1{,}7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}/(7{,}2 \cdot 10^{-45}\,\mathrm{m}^3) = 2{,}4 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m}^3$.

Hilfe zu A25 b: Durch den unglaublichen Gravitationsdruck kollabieren die Atome und die Elektronen werden salopp gesagt in die Protonen gedrückt. Man spricht vom inversen β-Zerfall: $p^+ + e^- \Rightarrow n + \nu_e$ (siehe Kap. 49.3, BB8). Die Atome werden durch die Schwerkraft quasi zu einem Neutronenbrei zermatscht, und die Neutronen liegen dann ohne Zwischenraum dicht aneinander. Daher liegt die Dichte eines Neutronensterns in der Größenordnung der Dichte von Atomkernen.

Hilfe zu A25 c: 1 mm³ ist der Milliardste Teil eines Kubikmeters, also 1 mm³ = $10^{-9}\,\mathrm{m}^3$. Ein 1 mm³ Neutronenstern hat daher eine Masse von $10^{17} \cdot 10^{-9}$ kg = 10^8 kg oder 10^5 Tonnen. Damit hat er eine ähnliche Masse, wie etwa 10.000 Klein-PKWs oder die größten Passagierschiffe der Welt (siehe Abb. 24 nächste Seite).

Abb. 24: Das Kreuzfahrtschiff „Freedom of the Seas“ hat eine Länge von fast 340 m und eine Masse von 71.000 Tonnen ($7{,}1 \cdot 10^7$ kg). Somit hat es sogar weniger Masse als 1 mm³ Neutronenstern (Foto: Andres Manuel Rodriguez).

Hilfe zu A26: Die Lichtablenkung an kosmischen Objekten, etwa der Sonne, ist normaler Weise minimal. Bei extrem massenreichen Objekten wie Neutronensternen oder schwarzen Löchern kann sie aber sehr beachtlich werden. Der Gravitationslinseneffekt führt generell dazu, dass das hintere Objekt quasi nach außen geschoben wird (siehe Abb. 17). In Fall der Abb. 16 entsteht dadurch ein Doppelbild des hinteren Sterns. Würde er symmetrisch hinter dem Neutronenstern liegen, entstünde ein Einstein-Ring.

Hilfe zu A27: Die Formel für die Fluchtgeschwindigkeit lautet $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Wenn du die bekannten Werte für die Sonne einsetzt (den Radius in Metern), erhältst du 617368 m/s oder rund 617 km/s. Für die Erde erhältst du

11209 m/s oder rund 11,2 km/s. Die Fluchtgeschwindigkeit von der Sonne ist also etwa 55-mal so groß wie die von der Erde.

Hilfe zu A28: Es gilt $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Der Schwarzschildradius ist erreicht, wenn $v = c$ gilt. Daher kann man schreiben: $c = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}} \rightarrow R_S = \frac{2GM}{c^2}$. Exakt dieses Ergebnis bekommt man auch unter Verwendung der ART. Dass bei unserer Berechnung dasselbe herauskommt, ist allerdings Zufall, weil wir ja die Gleichungen für E_p und E_k aus der Newton'schen Mechanik verwenden. Kein Zufall ist jedoch die Struktur der Formel: $R_S \sim \frac{G}{c^2}M$. In einer relativistischen Theorie der Gravitation müssen ja sowohl die Gravitationskonstante G als auch die Lichtgeschwindigkeit c eine Rolle spielen. Die ART stellt eine Beziehung zwischen Masse (Energie) und Länge (Raum-Zeitkrümmung) her. Eine Umrechnung von Masse in Länge liefert nur der Faktor $\frac{G}{c^2}$, denn es gilt $[R_S] = \mathrm{m} = \left[\frac{G}{c^2}M\right] = \frac{\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}}{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}\mathrm{kg} = \frac{\mathrm{m}^3\mathrm{s}^2\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} = \mathrm{m}.$

Hilfe zu A29 a: Das Volumen einer Kugel ist $V = \frac{4r^3\pi}{3}$. Wenn du für *r* den Schwarzschildradius $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ einsetzt, erhältst du $V = \frac{4\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3\pi}{3} = \frac{32G^3M^3\pi}{3c^6}$. Die kritische Dichte ist daher $\rho_c = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{32G^3M^3\pi}{3c^6}} = \frac{3c^6}{32G^3M^2\pi}$. Sobald eine kugelförmige Masse diese Dichte überschreitet, muss sie zu einem schwarzen Loch kollabieren.

Hilfe zu A29 b: Je größer die Masse eines schwarzen Lochs, desto kleiner kann seine Dichte sein. Die kritische Dichte kann dabei absurd winzig werden. Interessant ist, dass das sichtbare Universum eine Dichte hat, die über der kritischen Dichte für ein schwarzes Loch liegt (Abb. 25). Ist das Universum ein Schwarzes Loch? Das kann man so nicht sagen. Ein Schwarzes Loch braucht einen "Außenraum", damit der Begriff Ereignishorizont überhaupt einen Sinn hat. Das trifft aber auf das Universum nicht zu. Wahrscheinlich ist es so, dass es sich hier eher um einen Zufall handelt.

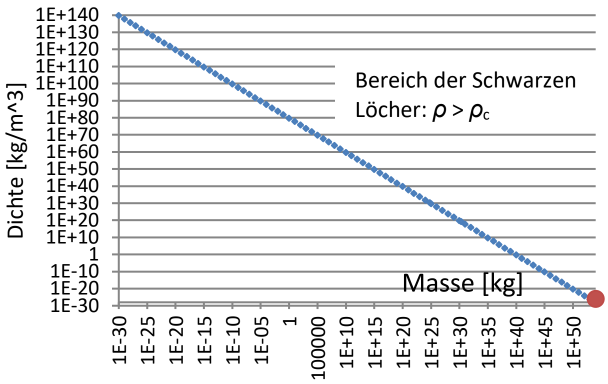

Abb. 25 zu A29 b (Grafik: Martin Apolin)

Hilfe zu A30: Es gilt $F_G = G\frac{mM}{r^2} \sim \frac{M}{r^2}$. Wenn die Sonne plötzlich ein Schwarzes Loch wäre, wäre es natürlich 8 Minuten später auf der Erde stockdunkel, aber auf die Gravitation hätte es keinen Einfluss, weil sich ja die Masse nicht ändert. Stellare Schwarze Löcher gibt es schon ab etwa 4 Sonnenmassen. Das ist nicht überwältigend viel, wenn man bedenkt, dass große Sterne weit über 100 Sonnenmassen haben können. Die verheerende Wirkung von Schwarzen Löchern kommt also nicht durch die Masse zu Stande, sondern durch den kleinen Radius! Dadurch kann man sich dem Massenzentrum viel stärker nähern, wodurch Gravitations- und Gezeitenkräfte (siehe A31 und 32) extrem anwachsen.

Hilfe zu A31 a: Unter Gezeitenkraft versteht man ganz allgemein, dass die Gravitationskraft an einem Objekt nicht überall gleich groß ist. Dadurch kann das Objekt verformt werden. Das ist etwa bei den Wassermassen auf der Erde der Fall, die durch die Gezeitenkräfte von Mond und Sonne zu Ebbe und Flut verformt werden. Im Extremfall kann das Objekt zerreißen oder zerbrechen. Die Saturnringe (Abb. 6) bestehen z. B. aus Milliarden von Brocken, die wahrscheinlich die Überreste eines Mondes sind, der durch die Gezeitenkraft zerrissen wurde.

In Abb. 19 siehst du die Gezeitenkraft zwischen Kopf und Füßen eines Astronauten in der Nähe eines Schwarzen Lochs. Bei a ist der Unterschied der Anziehungskräfte noch so gering, dass man ihn nur schwer einzeichnen kann. Bei b kannst du ihn schon sehr stark sehen. Wäre der Astronaut nur halb so groß (blaue Linie), dann wäre die Gezeitenkraft an dieser Stelle wesentlich geringer.

Hilfe zu A31 b: Die Gravitationsbeschleunigung im Feld einer Masse folgt aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz: $a = \frac{GM}{r^2}$. Nimm nun an, dass eine kleine Masse auf eine große fällt, etwa ein Astronaut in ein schwarzes Loch. Er soll mit den Füßen auf das schwarze Loch zufallen. Auf die Füße wirkt daher die Gravitationskraft stärker als auf den Kopf. Nimm an, die Größe des Astronauten ist Δr. Der Unterschied in der Beschleunigung von Kopf und Füßen entspricht dann der Gezeitenbeschleunigung. $\Delta a = a_{gez} = \frac{GM}{(r-\Delta r)^2} - \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{1}{\frac{(r-\Delta r)^2}{r^2}} - 1\right) = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{1}{\left(\frac{r-\Delta r}{r}\right)^2} - 1\right) = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} - 1\right)$. Wenn du die Reihenentwicklung anwendest und nach dem zweiten Glied abbrichst, erhältst du $\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} \approx 1 + 2\Delta r/r$). Wenn du oben einsetzt, bekommst du $a_{gez} = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} - 1\right) \approx \frac{GM}{r^2}(1 + 2\Delta r/r - 1) = 2\Delta r\frac{GM}{r^3}$.

	Schwarzes Loch 10 Sonnenmassen	Schwarzes Loch $4{,}3 \cdot 10^6$ Sonnenmassen
absolute Masse	$2 \cdot 10^{31}$ kg	$8{,}6 \cdot 10^{36}$ kg
Schwarzschildradius (R_s)	$2{,}96 \cdot 10^4$ m ≈ 30 km	$1{,}27 \cdot 10^{10}$ m ≈ 1/12 des Abstands Erde-Sonne
kritischer Abstand (r_{krit})	$3{,}63 \cdot 10^6$ m ≈ 3600 km	$2{,}74 \cdot 10^8$ m ≈ 1/550 des Abstands Erde-Sonne
	$r_{krit} > R_s$	$r_{krit} < R_s$

Tab. 14: berechnete Daten zu A31 und A32

Hilfe zu A32 a: Wenn du die bekannten Daten in die Formel für den Schwarzschildradius einsetzt, so erhältst du für das kleine Schwarze Loch einen Radius von etwa 30 km, für das große einen Radius von etwa 1/12 des Abstands Erde-Sonne (Tab. 14).

Hilfe zu A32 b: Eine Gezeitenbeschleunigung von 100 m/s² oder 10 *g* würde bedeuten, dass Kopf und Füße mit dem 10-fachen des Körpergewichts auseinander gezogen werden. Salopp gesagt wäre das so, als würde man dich auf der Erde am Kopf aufhängen und noch 10 Personen mit deinem Körpergewicht an deine Füße hängen. Es ist sehr unwahrscheinlich, dass das ein Mensch aushält. Wir sind aber großzügig und schätzen die obere noch tolerierbare Gezeitenbeschleunigung (auch wegen der schönen Zahl) mit 10 *g* ab - wahrscheinlich liegt sie um einiges niedriger!

Hilfe zu A32 c: Die Gezeitenbeschleunigung ist $a_{gez} \approx 2\Delta r\frac{GM}{r^3}$. Daraus folgt $r_{krit} = \sqrt[3]{\frac{2\Delta r GM}{a_{gez}}} = \sqrt[3]{\frac{2\Delta r GM}{10\,g}}$. Nehmen wir an, der Astronaut ist 1,8 m groß (Δr). Weil wir die maximal tolerierbare Gezeitenbeschleunigung mit 10 $g \approx$ 100 m/s² angenommen haben, ergeben sich für die kritischen Entfernungen rund $3{,}6 \cdot 10^6$ m und $2{,}7 \cdot 10^8$ m (siehe Tab. 14).

Hilfe zu A32 d: Beim kleinen Schwarzen Loch würde der Astronaut schon in sehr großer Entfernung spaghettisiert werden (Abb. 26; Tab. 14). Beim großen Schwarzen Loch liegt aber der kritische Abstand innerhalb des Schwarzschildradius – hier könnte der Flug durch das Schwarze Loch theoretisch gelingen.

Abb. 26: Beim kleinen Schwarzen Loch würde der Astronaut spaghettifiziert werden, bevor er durch den Schwarzschildradius fällt (Grafik: Janosch Slama).

Hilfe zu A31 e: Rechnen wir zunächst ganz allgemein. Die Gezeitenbeschleunigung ist $a_{gez} \approx 2\Delta r\frac{GM}{r^3}$. Wir wollen die Beschleunigung am Schwarzschildradius wissen, und müssen diesen daher für *r* einsetzen. $a_{gez} \approx 2\Delta r\frac{GM}{r^3} = 2\Delta r\frac{GM}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3} = 2\Delta r\frac{GM}{\frac{8G^3M^3}{c^6}} = 2\Delta r\frac{GMc^6}{8G^3M^3} = \frac{\Delta r c^6}{4G^2M^2}$. Dann können wir nach M umformen: $M = \sqrt[2]{\frac{\Delta r c^6}{4G^2 a_{gez}}} = \frac{c^3}{2G}\sqrt{\frac{\Delta r}{a_{gez}}}$. Wenn wir für Δr unsere 1,8 m einsetzen und für a_{gez} 100 m/s², dann vereinfacht sich die Gleichung zu $M = \frac{c^3}{2G} \cdot 0{,}134$ s . Die kritische Masse hängt dann also nur von zwei Naturkonstanten ab und beträgt in diesem Fall $2{,}7 \cdot 10^{34}$ kg oder rund 14.000 Sonnenmassen. Erst wenn ein Schwarzes Loch diese Masse übersteigt, könnte zumindest theoretisch dem Astronauten ein unbeschadeter Flug durch ein Wurmloch gelingen.

Hilfe zu A33 a: λ_R = (501,5 nm + 499,8 nm)/2 = 500,65 nm.

Hilfe zu A33 b: Aus $\frac{f_B}{f_Q} = \sqrt{\frac{(1+v_{BQ}/c)}{(1-v_{BQ}/c)}} = x$ folgt $v_{BQ} = c\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}$. Bei der Annäherung ist das Licht blauverschoben, die Wellenlänge somit kürzer (499,8 nm). Aus $f = c/\lambda$ folgt $f \sim 1/\lambda$. Daher gilt $x = \frac{f_B}{f_Q} = \frac{\frac{1}{\lambda_B}}{\frac{1}{\lambda_Q}} = \frac{\lambda_Q}{\lambda_B} = \frac{500{,}65\text{ nm}}{499{,}8\text{ nm}} = 1{,}0017$.

x^2 ist daher 1,0034 und $v_{BQ} = c\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)} = c\frac{1{,}0034-1}{1{,}0034+1} \approx 5{,}1 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s}$.

Hilfe zu A33 c: Die benötigte Zentripetalkraft kommt durch die Gravitation zu Stande. Man kann daher beide Gleichungen gleichsetzen und nach *M* auflösen: $F_G = G\frac{mM}{r^2} = F_{ZP} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow M = \frac{v^2 r}{G}$.

Hilfe zu A33 d: Die Bahngeschwindigkeit des Nebels beträgt $5{,}1 \cdot 10^5$ m/s (A33 b). Daher erhält man $M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{26{,}01 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{17}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}\ \mathrm{kg} = 3{,}7 \cdot 10^{39}\ \mathrm{kg}$. Das entspricht etwa $(3{,}7 \cdot 10^{39}$ kg$)/(2 \cdot 10^{30}$ kg$) = 1{,}85 \cdot 10^9$ Sonnenmassen, also beinahe 2 Milliarden Sonnenmassen. Mit hoher Wahrscheinlichkeit handelt es sich im Zentrum von M87 um ein superschweres schwarzes Loch.