

Lösung Aufgabe 249

a)

Die Anzahl der Fahrgäste, die keinen Fahrschein mit sich führen, ist binomialverteilt, weil es nur zwei mögliche Ausgänge einer Kontrolle gibt (Person besitzt einen gültigen Fahrschein oder nicht) und weil die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person einen gültigen Fahrschein besitzt, für alle Personen als gleich angenommen werden kann (Erfahrungswert).

Demnach ergibt sich mit der Formel der Binomialverteilung ($n = 25$, $p = 0,025$, $k = 2$)

$$P(X = 2) = \binom{25}{2} \cdot 0,025^2 \cdot 0,975^{23} = 0,1047.$$

b)

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Person in einem kontrollierten Waggon keinen Fahrschein besitzt, kann die Formel der Binomialverteilung verwendet werden. Da die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von n angegeben werden soll, bleibt n als Variable in der Formel stehen.

$$P(n) = \binom{n}{1} \cdot 0,025 \cdot 0,975^{n-1} = n \cdot 0,025 \cdot 0,975^{n-1}$$

Die Definitionsmenge beschreibt alle Zahlen, die n annehmen kann. Es sind dies die natürlichen Zahlen ohne die Zahl Null: $D = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Aussage A:

Die Aussage trifft zu, da die Steigung der Tangente an der Stelle 80 negativ ist (die Funktion ist streng monoton fallend).

Aussage B:

Die Aussage trifft nicht zu, da $P(20) = 0,3$ und $P(140) = 0,1$ ist.

Aussage C:

Die Aussage trifft nicht zu, da die Funktion P an der Stelle 40 rechts gekrümmt ist.

Aussage D:

Die Aussage trifft zu, da die Steigung der Funktion P an der Stelle 80 kleiner ist als an der Stelle 140.

Aussage E:

Die Aussage trifft zu, da die Funktion P an der Stelle 140 links gekrümmt ist.



c) Um die globale Maximumstelle der Funktion P zu bestimmen, setzt man die erste Ableitung gleich null. Da die Funktionsgleichung der ersten Ableitung schon gegeben ist, erhält man direkt:

$$0,025 \cdot 0,975^{x-1} \cdot (1 + x \cdot \ln(0,975)) = 0$$

Da 0,025 nicht null ist und $0,975^{x-1}$ nicht null werden kann (Exponentialfunktion), reicht es den Klammerausdruck zu betrachten.

$$\begin{array}{lcl} 1 + x \cdot \ln(0,975) = 0 & | - 1 & \\ x \cdot \ln(0,975) = -1 & | : \ln(0,975) & \end{array}$$

$$x = \frac{-1}{\ln(0,975)} = 39,49789 \approx 39,5$$

Mit Hilfe des Graphen erkennt, man dass die Randwerte von P keinen größeren Funktionswert haben. Also ist die Stelle 39,5 die globale Maximumstelle der Funktion P.

An dieser Stelle ist also die Wahrscheinlichkeit am größten, genau eine Person in einem Waggon anzutreffen, die keinen Fahrschein besitzt. Die Kontrolleure sollten also solche Waggon zur Kontrolle auswählen, in denen sich ungefähr 40 Personen befinden. Dann können sie damit rechnen, nur eine Schwarzfahrerin oder einen Schwarzfahrer anzutreffen.

