5 ELLIPSE, HYPERBEL UND PARABEL

W 5.01 Wie ist eine Ellipse definiert?

W 5.02 Wie lautet eine Gleichung einer Ellipse in 1. Hauptlage mit den Halbachsenlängen a und b?

W 5.03 Wie lauten die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte einer Ellipse in 1. Hauptlage?

W 5.04 Welche Beziehung besteht zwischen den Halbachsenlängen a, b und der Brennweite e bei einer Ellipse? Gilt stets $b \leq a$?

W 5.05 Warum kann ein Kreis als Spezialfall einer Ellipse angesehen werden?

W 5.06 Welche Lagebeziehungen kann es zwischen einer gegebenen Geraden und einer Ellipse geben? Ist jede Gerade, die mit einer Ellipse genau einen Punkt gemeinsam hat, stets eine Tangente?

W 5.07 Wie ist eine Hyperbel definiert?

W 5.08 Wie lautet eine Gleichung einer Hyperbel in 1. Hauptlage mit den Halbachsenlängen a und b?

W 5.09 Wie lauten die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte einer Hyperbel in 1. Hauptlage?

W 5.10 Welche Beziehung besteht zwischen den Halbachsenlängen a, b und der Brennweite e bei einer Hyperbel? Gilt stets $b \leq a$?

W 5.11 Welche Lagebeziehungen kann es zwischen einer gegebenen Geraden und einer Hyperbel geben? Ist jede Gerade, die mit einer Hyperbel genau einen Punkt gemeinsam hat, stets eine Tangente?

W 5.12 Nenne Eigenschaften der Asymptoten einer Hyperbel!

W 5.13 Gib Gleichungen der Asymptoten der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ an!

W 5.14 Wie ist eine Parabel definiert?

W 5.15 Wie lautet eine Gleichung einer Parabel in 1. Hauptlage mit dem Parameter p?

W 5.16 Wie lauten die Koordinaten des Brennpunkts einer Parabel in 1. Hauptlage?
Wie lautet eine Gleichung der Geraden l (Leitlinie) einer Parabel in 1. Hauptlage?

W 5.17 Welche Lagebeziehungen kann es zwischen einer gegebenen Geraden und einer Parabel geben? Ist jede Gerade, die mit einer Parabel genau einen Punkt gemeinsam hat, stets eine Tangente?

W 5.18 Warum bezeichnet man Ellipse, Hyperbel und Parabel als Kegelschnitte?

W 5.01 Eine Ellipse ell ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten F und F′ konstant (= 2a > $\overline{FF'}$) ist: ell = {X ∈ $\mathbb{R}^2$ | $\overline{FX} + \overline{F'X} = 2a$}.

W 5.02 Für (x | y) ∈ ell gilt: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

W 5.03 Scheitel A = (a | 0), A′ = (–a | 0), B = (0 | b), B′ = (0 | –b); Brennpunkte: F = (e | 0), F′ = (–e | 0)

W 5.04 $e^2 = a^2 - b^2$. Daraus folgt, dass stets b ≤ a.

W 5.05 Ein Kreis mit dem Radius r ist eine spezielle Ellipse mit a = b = r, wobei die beiden Brennpunkte im Mittelpunkt des Kreises zusammenfallen.

W 5.06 Eine Ellipse kann mit einer Geraden keinen Punkt, einen Punkt oder zwei gemeinsame Punkte haben. Für Ellipsen gilt (wie für Kreise), dass eine Gerade genau dann Tangente ist, wenn sie mit der Ellipse einen Punkt gemeinsam hat.

W 5.07 Eine Hyperbel hyp ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die der Unterschied (Betrag der Differenz) der Abstände von zwei gegebenen Punkten F und F′ konstant (= 2a < $\overline{FF'}$) ist: hyp = {X ∈ $\mathbb{R}^2$ | $|\overline{FX} - \overline{F'X}| = 2a$}.

W 5.08 Für (x | y) ∈ hyp gilt: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

W 5.09 Scheitel A = (a | 0), A′ = (–a | 0), B = (0 | b), B′ = (0 | –b); Brennpunkte: F = (e | 0), F′ = (–e | 0)

W 5.10 $e^2 = a^2 + b^2$. Im Gegensatz zur Ellipse muss bei der Hyperbel nicht unbedingt b ≤ a gelten.

W 5.11 Eine Hyperbel kann mit einer Geraden keinen Punkt, einen Punkt oder zwei gemeinsame Punkte haben. Tangenten an die Hyperbel haben genau einen Berührpunkt; die Parallelen zu den Asymptoten haben genau einen Schnittpunkt mit der Hyperbel.

W 5.12 Die Äste einer Hyperbel kommen den Asymptoten beliebig nahe, ohne diese jemals zu berühren.

W 5.13 Die Asymptoten u und v einer Hyperbel hyp: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ haben die Gleichungen u: $y = \frac{b}{a} \cdot x$ und v: $y = -\frac{b}{a} \cdot x$.

W 5.14 Eine Parabel ist die Menge aller Punkte einer Ebene E, die von einem gegebenen Punkt F und einer gegebenen Geraden l gleichen Abstand haben (F ∉ l): par = {X ∈ $\mathbb{R}^2$ | $\overline{FX} = \overline{Xl}$}

W 5.15 Für (x | y) ∈ par gilt: $y^2 = 2px$.

W 5.16 F = ($\frac{p}{2}$ | 0); l: $x = -\frac{p}{2}$

W 5.17 Eine Parabel kann mit einer Geraden keinen Punkt, einen Punkt oder zwei gemeinsame Punkte haben. Tangenten an die Parabel haben genau einen Berührpunkt; jede Gerade, die zur Achse einer Parabel parallel ist, hat genau einen Schnittpunkt mit dieser Parabel.

W 5.18 Sei a eine Gerade im Raum und S ein Punkt auf a. Alle Geraden, die durch den Punkt S gehen und mit der Geraden a einen Winkel vom Maß α einschließen, bilden eine unbegrenzte Fläche, die man als Doppelkegel bezeichnet. Die Gerade a heißt Achse dieses Doppelkegels. Die Geraden, aus denen der Doppelkegel besteht, heißen Erzeugende bzw. Mantellinien des Doppelkegels. Der Punkt S heißt Spitze des Doppelkegels.
Schneidet man einen solchen Doppelkegel mit einer Ebene E, die nicht durch die Spitze S geht, erhält man je nach Lage der Ebene verschiedene Schnittkurven, die in den folgenden Abbildungen dargestellt sind.

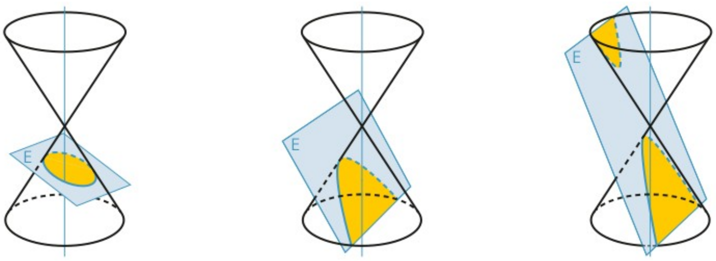

Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3

Man kann beweisen:
Die Schnittkurve in Abb. 1 ist eine Ellipse. (Falls die Ebene normal zur Achse ist, erhält man als Sonderfall einen Kreis.)
Die Schnittkurve in Abb. 2 ist eine Parabel. (In diesem Fall ist die Ebene parallel zu einer Erzeugenden des Doppelkegels.)
Die Schnittkurve in Abb. 3 ist eine Hyperbel.