# Lösungen - Impuls und Drehimpuls

## 1 Impuls

### Teste dein Wissen 1:
Der Kreuze an, für welche Größen ein Erhaltungssatz gilt.
a) Masse
b) Kraft
c) kinetische Energie
d) Impuls

**Antwort:**
**Richtig ist d) Impuls:** In abgeschlossenen Systemen bleibt der Gesamtimpuls erhalten (Impulserhaltungssatz):

$$\vec{p}_{ges} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \cdots = \vec{p}'_{ges}$$

($\vec{p}_{ges}/\vec{p}'_{ges}$... Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß, $\vec{p}_{1/2/\ldots}$... Impuls des 1., 2, ... Körpers)

**Falsch ist a) Masse:** In der **klassischen Physik** gilt der zwar **Massenerhaltungssatz**: Die Masse bleibt in abgeschlossenen Systemen erhalten. Z.B.: bei chemischen Reaktionen oder Bewegungen im klassischen Sinn, wobei mit der Umgebung weder Energie noch Materie ausgetauscht werden darf. Allerdings können in der **modernen Physik** Masse und Energie ineinander umgewandelt werden, weshalb man genauer von der **Energie- und Massenerhaltung** spricht.

**Falsch ist b) Kraft:** Die Kraft ist keine Erhaltungsgröße, sondern eine Wechselwirkungsgröße, die Impulsänderungen beschreibt. Z.B.: Ein Kraftstoß auf einen Körper ändert dessen Geschwindigkeit und damit dessen Impuls.

**Falsch ist c) kinetische Energie:** Die kinetische Energie wird nicht immer erhalten. Sie bleibt nur bei **elastischen Stößen** erhalten. Wird kinetische Energie beispielsweise in Wärme oder potenzielle Energie umgewandelt (z. B. bei inelastischen Stößen), ist sie nicht mehr konstant. Nur die Gesamtenergie, also die Summe aller Energieformen (kinetisch, potentiell, thermisch, etc.) bleibt in abgeschlossenen Systemen erhalten.

### Teste dein Wissen 2:
Kreuze an, in welcher Einheit man den Impuls angibt.
a) kg·m
b) N/s
c) kg·m/s$^2$
d) kg·m/s

**Antwort:**
Der Impuls $\vec{p}$ wird definiert als das Produkt aus Masse $m$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Einheiten: Masse in Kilogramm (kg), Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s).
**Die richtige Antwort ist daher:**
**d) kg·m/s**

## Teste dein Wissen 3:

Eine Schwimmerin beginnt zu schwimmen. Ihr Impuls nimmt zu. Überlege und begründe, ob die Impulszunahme der Schwimmerin

a) größer als die Impulszunahme des Wassers ist.
b) kleiner als die Impulszunahme des Wassers ist.
c) genauso groß wie die Impulszunahme des Wassers ist.

**Antwort:**

Nach dem dritten Newtonschen Gesetz (**Actio = Reactio**) übt die Schwimmerin eine Kraft auf das Wasser aus, und das Wasser übt eine gleich große, entgegengesetzte Kraft auf die Schwimmerin aus. Dadurch nimmt der Impuls des Wassers genauso stark zu wie der der Schwimmerin, jedoch in entgegengesetzter Richtung. Dies entspricht in einem abgeschlossenen System dem Gesetz der Impulserhaltung:

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{ges}} = \vec{p}_S + \vec{p}_W = \vec{p}_S' + \vec{p}_W' = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{ges}}' = \mathbf{0}$$

Entsprechend sind die Impulse entgegengesetzt:

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{m_S} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{S}} = -\boldsymbol{m_W} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{W}} = -\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{W}}$$

($\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{ges}}/\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{ges}}'$... Gesamtimpuls vor und während des Schwimmens, $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{S/W}}$... Impuls der Schwimmerin/des Wassers, $\boldsymbol{m_{S/W}}$... Masse der Schwimmerin/des Wassers, $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{S/W}}$ ...Geschwindigkeit der Schwimmerin/des Wassers)

**Die richtige Antwort ist daher:**
**c) genauso groß wie die Impulszunahme des Wassers ist.**

## Teste dein Wissen 4:

Kreuze an, welcher Stoß elastisch ist.

a) Die innere Energie verändert sich beim Stoß nicht.
b) Die innere Energie nimmt beim Stoß zu.
c) Die innere Energie nimmt beim Stoß ab.

**Antwort:**

Ein elastischer Stoß ist durch die vollständige Erhaltung der kinetischen Energie gekennzeichnet. Es gibt keine Umwandlung von kinetischer Energie in innere Energie (z. B. Wärme oder Verformung). Daher bleibt die innere Energie unverändert.

**Die richtige Antwort ist daher:**
**a) Die innere Energie verändert sich beim Stoß nicht.**

## Teste dein Wissen 5:

Beschreibe, was geschieht, wenn eine Kugel gegen eine gleichartige ruhende Kugel stößt und der Stoß unelastisch ist:

a) Die zweite Kugel fliegt mit der Geschwindigkeit der ersten weg.
b) Beide Kugeln fliegen mit halber Geschwindigkeit zusammen weiter.
c) Beide Kugeln bleiben stehen.

**Antwort:**

Bei einem unelastischen Stoß bleiben die beiden Kugeln nach dem Stoß zusammen (maximale Umwandlung kinetischer Energie in innere Energie, z. B. Wärme oder Verformung).
Für den Gesamtimpuls $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{ges}}/\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{ges}}'$ vor und nach dem Stoß gilt:
(wobei $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m_1} = \boldsymbol{m_2}$ **,** da die Massen der Kugeln ident sind)

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{ges}} = \boldsymbol{m} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \mathbf{0} \quad \text{sowie} \quad \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{ges}}' = (m+m) \cdot \vec{v}' = \mathbf{2}\boldsymbol{m} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}'$$

($\boldsymbol{m}$... Masse der 1./2. Kugel, $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ ... Geschwindigkeit der 1. Kugel, $\vec{\boldsymbol{v}}'$ ... gemeinsame Geschwindigkeit)

Um die gemeinsame Geschwindigkeit zu erhalten, setzen wir $\vec{p}_{ges} = \vec{p}'_{ges}$ und formen nach $\vec{v}'$ um:

$$\vec{v}' = \frac{m}{2m} \cdot \vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{2}$$

Die Gesamtgeschwindigkeit der beiden Kugeln wird gleichmäßig aufgeteilt, da die Massen identisch sind.

**Die richtige Antwort ist daher:**

**b) Beide Kugeln fliegen mit halber Geschwindigkeit zusammen weiter.**

## Teste dein Wissen 6:

Suche im Internet nach einem Zeitlupenvideo von einem Kopfball. Analysiere mit Hilfe des Zeitlupenvideos zu einem Kopfball die Rolle des Impulses bei Kopfbällen.

**Beispielantwort:**

Beim Kopfball überträgt der Spieler, durch einen (annähernd) elastischen Stoß, einen Impuls auf den Ball. Der Ball erfährt eine Geschwindigkeitsänderung, die proportional zur Kraft und zur Einwirkzeit ist:

$$\Delta\vec{p} = m \cdot \Delta\vec{v} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Der Kopf übt eine kurze, aber starke Kraft auf den Ball aus, wodurch dieser beschleunigt wird. Die Richtung des Impulses (Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$) bestimmt die Flugbahn des Balls.

## Teste dein Wissen 7:

Beschreibe mögliche Gefahren bei einem Kopfball und wie man sich schützen kann.

**Beispielantwort:**

Gefahren:

- Kopfverletzungen wie Gehirnerschütterungen und (kleine) Brüche durch die starke Stoßbelastung.
- Langfristige Schäden im Gehrin durch wiederholte Kopfbälle.

Schutz:

- Kopfballtechnik verbessern, um die Belastung gleichmäßig zu verteilen.
- Regelmäßiges Nacken- und Schultertraining sowie Dehnübungen.
- Nutzung eines leichteren Balls oder Schutzkopfbändern bei Trainingsspielen.

## Teste dein Wissen 8:

Erkläre, welche Bedeutung der Impuls für die Fortbewegung von Tieren hat (**19.1**).

Bild: snygo – aboutpixel.de

**Beispielantwort:**

Tiere nutzen den Impuls, um Bewegung zu erzeugen.
Durch Abstoßen vom Boden oder Wasser übertragen sie Impuls auf die Umgebung, wodurch eine Vorwärtsbewegung entsteht.
Zum Beispiel:

- Fische stoßen Wasser nach hinten, um nach vorne zu schwimmen (Rückstoßprinzip).
- Säugetiere wie Geparden nutzen Impulse beim Laufen, indem sie den Boden nach hinten drücken und so Vortrieb erzeugen.

### Teste dein Wissen 9:

Erkläre, was ein Feuerwerk mit Impulserhaltung zu tun hat (**19.2**).

Bild: Kenneth Sponsler/iStockphoto.com

**Antwort:**
Beim Feuerwerk wirkt das Gesetz der Impulserhaltung:

- Wenn eine Rakete explodiert, bewegt sich jedes Teilchen in unterschiedliche Richtungen, sodass die Gesamtimpulsbilanz des Systems null bleibt.
- Der Rückstoß der Gase treibt die Rakete nach oben. Dieser Rückstoßimpuls ist gleich dem Impuls der ausgestoßenen Gase, jedoch in entgegengesetzter Richtung.

### Teste dein Wissen 10:

Mache mit der Zeitlupenfunktion in den Kameraeinstellungen auf deinem Smartphone eine Zeitlupenaufnahme von einem Tennisaufschlag oder einem springenden Ball (vgl. S. 16). Analysiere die Unterschiede zwischen deiner Aufnahme und den Aufnahmen im Buch.

**Beispielantwort:**
Zeitlupenaufnahme mit Smartphone:

- Eine Zeitlupenaufnahme zeigt den Bewegungsablauf (nahezu) kontinuierlich, aber mit einer verringerten Abspielgeschwindigkeit.
- Dies ist hilfreich, um kleinste Bewegungsdetails wie die Biegung des Schlägers beim Aufprall des Balls oder die Verformung des Balls zu analysieren. Je mehr Bilder pro Sekunde (fps – *frames per second*) die Kamera aufnehmen kann, desto mehr Bewegungsdetails kann man erkennen.

Buchabbildung 16.1 (Tennisaufschlag) und 16.2 (Basketball-Trajektorie): Stroboskop-Aufnahme

- Eine Stroboskop-Aufnahme zerlegt die Bewegung in diskrete Einzelbilder, die in festen Zeitabständen aufgenommen wurden.
- Diese Darstellung ermöglicht es, die Position des Balls oder Schlägers zu bestimmten Zeitpunkten präzise zu bestimmen und Geschwindigkeitsänderungen zu erkennen.
- Allerdings fehlen kontinuierliche Übergänge zwischen den Momenten, was die Bewegungsdynamik weniger anschaulich macht.

### Rechenaufgabe 1:

Zwei Fahrzeuge mit gleicher Masse m prallen so gegeneinander, dass sich die Fahrzeuge ineinander verkeilen. Betrachte zwei verschiedene Situationen:
a) Beide Fahrzeuge fahren mit der gleichen Geschwindigkeit v aufeinander zu.
b) Ein Fahrzeug fährt mit der Geschwindigkeit 2*v* gegen ein ruhendes.
Stelle für beide Fälle den Impulssatz und den Energieerhaltungssatz auf. Berechne die Geschwindigkeit der Fahrzeuge nach dem Stoß, sowie die Zunahme der inneren Energie

**Antwort:** (unelastischer gerader Stoß)
**Situation a): Beide Fahrzeuge fahren mit der gleichen Geschwindigkeit v aufeinander zu.**
Da die Fahrzeuge mit gleicher Geschwindigkeit, **aber in entgegengesetzter Richtung**, aufeinander zufahren, gilt für den Gesamtimpuls vor dem Stoß:

$$p = m \cdot v + m \cdot (-v) = 0$$

Gesamtimpuls nach dem Stoß:
Die Fahrzeuge verkeilen sich und bewegen sich deshalb zusammen mit:

$$p' = (m + m) \cdot v' = 2m \cdot v'$$

Da die Impulserhaltung $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}$ gilt, folgt daraus:

$$\boldsymbol{p' = 2m \cdot v' \Rightarrow v' = 0}$$

**Beide Fahrzeuge bleiben nach dem Stoß stehen!**

Die Gesamtenergie vor dem Stoß ergibt sich aus den kinetischen Energien beider Fahrzeuge und der inneren Energie:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2 + U = \boldsymbol{m \cdot v^2 + U}$$

Gesamtenergie nach dem Stoß mit $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{E}' = \frac{1}{2}(m+m) \cdot v'^2 + U' = \boldsymbol{U}'$$

Setzen wir nun die Gesamtenergien vor und nach dem Stoß aufgrund des Energieerhaltungssatzes gleich $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$, dann folgt für die innere Energie $\boldsymbol{U}'$ nach dem Stoß:

$$U' = m \cdot v^2 + U$$

**Die Zunahme der inneren Energie nach dem Stoß entspricht deshalb der gesamten kinetischen Energien beider Fahrzeuge vor dem Stoß:**

$$\boldsymbol{U' - U = \Delta U = m \cdot v^2 = E_{kin}}$$

**Situation b): Ein Fahrzeug fährt mit der Geschwindigkeit 2*v* gegen ein ruhendes.**

Da nun nur ein Fahrzeug mit doppelter Geschwindigkeit gegen ein ruhendes Fahrzeug fährt, gilt für den Gesamtimpuls vor dem Stoß:

$$p = m \cdot 2v + 0 = 2m \cdot v$$

Gesamtimpuls nach dem Stoß:
Die Fahrzeuge verkeilen sich und bewegen sich deshalb zusammen mit:

$$p' = (m+m) \cdot v' = 2m \cdot v'$$

Da die Impulserhaltung $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}$ gilt, folgt daraus:

$$\boldsymbol{p}' = 2m \cdot v' = 2m \cdot v = \boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{v' = v}$$

**Beide Fahrzeuge bewegen sich zusammen mit $v$ (in Richtung des bewegten Fahrzeuges vor dem Stoß) weiter!**

Die Gesamtenergie vor dem Stoß ergibt sich aus den kinetischen Energien beider Fahrzeuge und der inneren Energie:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}m \cdot (2v)^2 + 0 + U = \boldsymbol{2m \cdot v^2 + U}$$

Gesamtenergie nach dem Stoß mit $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{E}' = \frac{1}{2}(m+m) \cdot v'^2 + U' = \boldsymbol{m \cdot v^2 + U'}$$

Setzen wir nun die Gesamtenergien vor und nach dem Stoß aufgrund des Energieerhaltungssatzes gleich $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$, dann folgt für die innere Energie $\boldsymbol{U}'$ nach dem Stoß:

$$U' = 2m \cdot v^2 - m \cdot v^2 + U = m \cdot v^2 + U$$

**Die Zunahme der inneren Energie nach dem Stoß entspricht deshalb der halben kinetischen Energien vor dem Stoß:**

$$\boldsymbol{U' - U = \Delta U = m \cdot v^2 = \frac{E_{kin}}{2}}$$

Zusatz: Die überschüssige innere Energie wird größtenteils in Verformungs-, Wärme- und Schallenergie umgewandelt.

## Rechenaufgabe 2:

Ein Fußball (m = 0,45 kg) fliegt mit *v* = 30 m/s in die Arme der Torhüterin (*m* = 60 kg).
a) Berechne den Impuls, der dadurch auf die Torhüterin übertragen wird.
b) Ermittle die Kraft, die auf die Torhüterin wirkt, wenn der Ball innerhalb 0,1 Sekunden gefangen wird.

**Antwort:** (unelastischer Stoß)
**a) Impulsübertragung:**
Der Impuls $\boldsymbol{p_1}$ des Balls ist:

$$\boldsymbol{p_1} = m_1 \cdot v_1 = 0{,}45\,\mathrm{kg} \cdot 30\,\mathrm{m/s} = \mathbf{13{,}5\,kg \cdot m/s}$$

($m_1$ ... Masse des Balls, $v_1$... Geschwindigkeit des Balls)

**Da der Ball gestoppt wird, ist dies der gesamte Impuls, der auf die Torhüterin übertragen wird.**

**b) Kraftberechnung:**
Um die Kraft, die auf die Torhüterin wirkt, zu berechnen, müssen wir zunächst die Geschwindigkeitsänderung der Torhüterin nach dem Stoß bestimmen (angenommen die Torhüterin steht vor dem Stoß still) und mit dieser die Impulsänderung $\boldsymbol{\Delta p}$.
Es gilt der Impulserhaltungssatz:

$$p = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_2' = p'$$

Da $v_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 0$ (Torhüterin vor dem Stoß) folgt:

$$p_1 = m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_2' \Rightarrow v_2' = \frac{p_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{13{,}5\,\mathrm{kg \cdot m/s}}{60{,}45\,\mathrm{kg}} \approx 0{,}223\,\mathrm{m/s}$$

($m_2$ ... Masse der Torhüterin, $v_2'$ ... Geschwindigkeit der Torhüterin nach dem Stoß)

Die Impulsänderung der Torhüterin vor und nach dem Stoß beträgt somit:

$$\Delta p = p_2' - p_2 = m_2 \cdot \mathrm{v}_2' - 0 \approx 13{,}4\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

Die Kraft ergibt sich nun aus dem Quotienten der Impulsänderung $\boldsymbol{\Delta p}$ und der Einwirkzeit $\boldsymbol{\Delta t}$:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{\Delta p}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{13{,}4\ \mathrm{kg \cdot m/s}}{0{,}1\ \mathrm{s}} = \mathbf{134\ N}$$

## Rechenaufgabe 3:

Berechne die Rückstoßkraft, der eine Einsatzkraft der Feuerwehr standhalten muss, wenn sie ein Strahlrohr hält, aus dem in der Sekunde 7 Liter Wasser mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s strömen.

**Antwort:** (Rückstoßprinzip)
Wenn in der **Zeit** $\Delta \boldsymbol{t}$ eine bestimmte **Wassermasse** $\Delta \boldsymbol{m_W}$ mit der **Geschwindigkeit** $\boldsymbol{v_W}$ aus dem Rohr strömt, ist ihre Impulsänderung:

$$\Delta p_W = \Delta m_W \cdot v_W$$

Diese Impulsänderung entspricht dem Kraftstoß $F_R \cdot \Delta t$. Die **Rückstoßkraft** $\boldsymbol{F_R}$ ergibt sich zu:

$$\boldsymbol{F_R} = \frac{\Delta \boldsymbol{m_W}}{\Delta \boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{v_W} = \frac{\Delta \boldsymbol{p_W}}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

Der Rückstoßkraft ist daher umso größer, je höher die Geschwindigkeit der austretenden Wassermasse ist und je mehr Wasser pro Sekunde ausströmt. Fügen wir die entsprechenden Werte (wobei 1 Liter Wasser 1 kg entspricht) in die Formel für die Rückstoßkraft ein, erhalten wir:

$$\boldsymbol{F_R} = \frac{7\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{s}} \cdot 20\,\mathrm{m/s} = 140\,\mathrm{kg} \cdot m/s^2 = \mathbf{140\ N}$$

**Eine Einsatzkraft der Feuerwehr muss also einer Rückstoßkraft von 140 N standhalten.**

## Rechenaufgabe 4:

Führe mithilfe der Simulation **15.3** elastische und unelastische Stöße von zwei Körpern mit $m_1 = m_2$ und $m_1 = 2m_2$ durch. Überprüfe die Impuls- und die Energiebilanz. Fasse deine Ergebnisse schriftlich zusammen.

**Antwort: (offene Aufgabe)**
**Ansatz: Elastische Stöße**

Es gilt die **Impulserhaltung**:

$$p_{ges} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' = p_{ges}'$$

Umgeformt führt dies zur **Gleichung 1**:

$$\boldsymbol{m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2)}$$

Für die **Energieerhaltung** gilt:

$$E = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 + U = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2'^2 + U = E'$$

Umgeformt führt dies zu:

$$m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 \cdot (v_2'^2 - v_2^2)$$

Durch Erweitern erhalten wir **Gleichung 2**:

$$\boldsymbol{m_1 \cdot (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2)(v_2' + v_2)}$$

Setzen wir nun Gleichung 1 in Gleichung 2 ein, erhalten wir:

$$m_2 \cdot (v_2' - v_2)(v_1 + v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$$

Wir kürzen $m_2 \cdot (v_2' - v_2)$ von beiden Seiten, formen nach $v_1'$ um und erhalten **Gleichung 3**:

$$\boldsymbol{v_1' = v_2' + v_2 - v_1}$$

Zuletzt setzen wir die rechte Seite aus Gleichung 3 für $v_1'$ in Gleichung 1 ein:

$$\boldsymbol{m_1 \cdot (v_1 - v_2' - v_2 + v_1) = m_2 \cdot (v_2' - v_2)}$$

Formen wir nach $v_2'$ um erhalten wir:

$$\boldsymbol{v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \cdot v_2}$$

Analog können wir für $v_1'$ vorgehen und erhalten:

$$\boldsymbol{v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 + \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \cdot v_1}$$

**Für $\boldsymbol{m_1 = m_2 = m}$:**

Setzen wir nun die Massen $m$ in die Formeln für $v_1'$ und $v_2'$ ein, so erhalten wir:

$$\boldsymbol{v_2' = v_1 \ \text{ und } \ v_1' = v_2}$$

**Beide Körper tauschen nach dem Stoß ihre Geschwindigkeiten aus.**

**Für $\boldsymbol{m_1 = 2m_2}$:**

Setzen wir nun für die Masse $m_1 = 2m_2$ in die Formeln für $v_1'$ und $v_2'$ ein, so erhalten wir:

$$\boldsymbol{v_2' = \frac{4}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 \ \text{ und } \ v_1' = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2}$$

**Die Körper haben nach dem Stoß entsprechend den Anteilen der Geschwindigkeiten vor dem Stoß unterschiedliche Endgeschwindigkeiten.**

**Ansatz: Unelastische Stöße**

Es gilt die **Impulserhaltung**:

$$p_{ges} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v' = p_{ges}'$$

Umgeformt führt dies zur **Gleichung 1**:

$$\boldsymbol{v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$

Für die **Energieerhaltung** gilt:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v'^2 + U' = E'$$

Setzen wir nun $v'$ aus Gleichung 1 ein und vereinfachen, dann ergibt sich folgende Gleichung:

$$m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 + U = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} + U'$$

Wir können nun die Differenz der inneren Energie nehmen, beide Seiten mit $m_1 + m_2$ multiplizieren und gleiche Terme auslöschen:

$$\cancel{m_1^2 \cdot v_1^2} + m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2) + \cancel{m_2^2 \cdot v_2^2} = \cancel{m_1^2 \cdot v_1^2} + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 + \cancel{m_2^2 \cdot v_2^2} + (m_1 + m_2)(U' - U\ )$$

Schlussendlich gilt für die Änderung der inneren Energie:

$$\boldsymbol{U' - U = \Delta U} = \frac{m_1 m_2 \cdot (v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2)}{m_1 + m_2} = \boldsymbol{\frac{m_1 m_2 \cdot (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}}$$

**Für $\boldsymbol{m_1 = m_2 = m}$:**

Setzen wir nun die Massen $m$ in die Formel für $v'$ ein, so erhalten wir die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoß:

$$\boldsymbol{v'} = \frac{m \cdot (v_1 + v_2)}{2m} = \boldsymbol{\frac{v_1 + v_2}{2}}$$

**Beide Körper bewegen sich mit der mittleren Geschwindigkeit weiter.**

Für die Änderung der inneren Energie gilt:

$$\boldsymbol{\Delta U} = \frac{m^2 \cdot (v_1 - v_2)}{2m} = \boldsymbol{\frac{m}{2} \cdot (v_1 - v_2)}$$

**Für $\boldsymbol{m_1 = 2m_2}$:**

Setzen wir nun für die Masse $m_1 = 2m_2$ in die Formel für $v'$ ein, so erhalten wir:

$$\boldsymbol{v'} = \frac{2 m_2 v_1 + m_2 v_2}{2 m_2 + m_2} = \boldsymbol{\frac{2}{3} v_1 + \frac{1}{3} v_2}$$

**Die Körper haben nach dem Stoß entsprechend den Anteilen der Geschwindigkeiten vor dem Stoß die gleiche Endgeschwindigkeit. Aufgrund der doppelten Masse von $\boldsymbol{m_1}$ hat dessen Anfangsgeschwindigkeit auch den doppelten Anteil an der Endgeschwindigkeit!**

Für die Änderung der inneren Energie gilt:

$$\boldsymbol{\Delta U} = \frac{2 m_2^2 \cdot (v_1 - v_2)}{3 m_2} = \boldsymbol{\frac{2 m_2}{3} \cdot (v_1 - v_2)}$$

## 2 Drehimpuls

### Teste dein Wissen 1:

Überprüfe, ob das Kind seine Eltern auf der Wippe mit seinem Gewicht so hochbringen kann und begründe deine Überlegungen (**29.1**)

Illustration: Oleksandra Toropenko, Wien

**Antwort:**
Damit sich die Kräfte ausgleichen und die Wippe still steht, gilt dem Hebelgesetz zufolge nämlich:
**Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm**

Oder in die mathematische Sprache übersetzt:

$$\boldsymbol{M_K = F_K \cdot r_K = F_L \cdot r_L = M_L}$$

($\boldsymbol{M_{K/L}}$… Drehmoment am Kraft-/Lastarm, $\boldsymbol{F_{K/L}}$… Kraft/Last, $\boldsymbol{r_{K/L}}$… Kraft-/Hebelarmlänge**)**

Da das Kind leichter ist als beide Elternteile zusammen, übt es eine kleinere Kraft auf die Wippe aus. Um das Drehmoment nun zu vergrößern und damit die Eltern (Last) hochbringen zu können, muss das Kind (Kraft) entsprechend weiter von der Drehachse entfernt sitzen:

$$\boldsymbol{r_K > \frac{F_L}{F_K} \cdot r_L \left( = \frac{m_L}{m_K} \cdot r_L \right)} \text{ da } \boldsymbol{F = m \cdot g}$$

($\boldsymbol{m_{K/L}}$… Masse am Kraft-/Lastarm, $\boldsymbol{g}$**…** Erdbeschleunigung**)**

### Teste dein Wissen 2:

Eine Kreisscheibe bewegt sich unterschiedlich auf einer Kreisbahn. Beschreibe die beiden Bewegungen 1 und 2 (**29.2**).

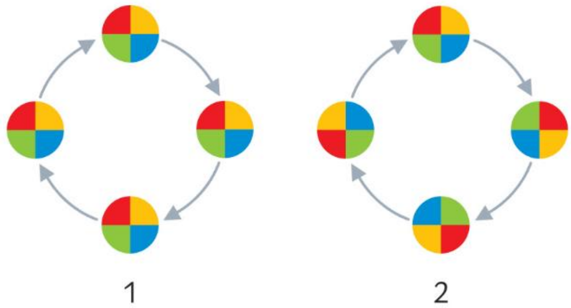


Illustration: Bernd Pavlik, Neusiedl am See

**Beispielantwort:**
(Angenommen die Masse der Kreisscheibe ist homogen verteilt, die Bewegungen der Kreisscheibe sind gleichförmig, sie erfährt dabei keine Reibung und die Drehachsen stehen parallel zueinander.)

**Bewegung 1:**
Die Kreisscheibe rotiert nicht um die eigene Drehachse, sondern umläuft einmal nur eine äußere Achse.
Bezüglich der eigenen Drehachse:
Da sich die Kreisscheibe nicht um die eigene Drehachse dreht, sind Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung gleich null. Es wirkt deshalb kein Drehmoment auf die Kreisscheibe.
Bezüglich der äußeren Drehachse:
Da sich die Kreisscheibe mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit gleichförmig bewegt, wirkt auch hier kein äußeres Drehmoment.

**Bewegung 2:**
Die Kreisscheibe rotiert bei einem Umlauf um eine äußere Achse einmal um die eigene Drehachse.
Bezüglich der eigenen Drehachse:
Da sich die Kreisscheibe um die eigene Drehachse gleichförmig dreht, wirkt kein Drehmoment auf diese und die Winkelgeschwindigkeit bleibt konstant.
Bezüglich der äußeren Drehachse:
Da keine äußeren Kräfte oder Drehmomente auf die Scheibe wirken, die diese Rotation stören könnten, bleibt die Winkelgeschwindigkeit auch hier konstant.

**Zusatz:** Auch wenn von einer gleichförmigen Kreisbewegung/Rotation die Rede ist, so ist auch diese Bewegung eine beschleunigte Bewegung. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt zwar konstant, aber die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich bei einer Kreisbewegung ständig. Diese kontinuierliche Richtungsänderung deutet auf eine beschleunigte Bewegung. Diese Richtungsänderung wird durch die sogenannte Zentripetalbeschleunigung (Zentripetalkraft) verursacht. Sie zeigt immer zum Mittelpunkt des Kreises und sorgt dafür, dass der Körper auf seiner kreisförmigen Bahn bleibt. Ihr entgegengesetzt wirkt die Zentrifugalbeschleunigung (Zentrifugalkraft die eigentlich aus der Trägheit z.B.: der Teilchen aus der die Kreisscheibe besteht, resultiert)

## Teste dein Wissen 3:

Kreuze an, welche Richtung die Winkelgeschwindigkeit hat.
a) Sie ist kein Vektor, sie hat keine Richtung.
b) Sie hat die gleiche Richtung wie die Bahngeschwindigkeit.
c) Sie steht senkrecht zur Bahngeschwindigkeit.

**Antwort:**
Die Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ fällt mit der Drehachse zusammen und wird durch die **Rechte-Hand-Regel** bestimmt: Wenn die Finger der rechten Hand in Drehrichtung zeigen, zeigt der Daumen in die Richtung von $\vec{\omega}$. Sie ist deshalb ein Vektor, der senkrecht zur Bahnebene/Bahngeschwindigkeit steht.
**Die richtige Antwort ist daher:**
**c) Sie steht senkrecht zur Bahngeschwindigkeit.**

## Teste dein Wissen 4:

Kreuze den richtigen Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ des starren Körpers und der Bahngeschwindigkeit *v* eines Körperpunktes an.
a) $v = \frac{r}{\omega}$
b) $v = r \cdot \omega$
c) $v = \frac{2\pi}{\omega}$

**Antwort:**
Die Bahngeschwindigkeiten beliebiger Punkte eines starren Körpers sind (direkt) proportional zu deren Abstand von der Drehachse. Der Proportionalitätsfaktor ist die Winkelgeschwindigkeit.
**Die richtige Antwort ist daher:**
**b)** $\boldsymbol{v = r \cdot \omega}$

## Teste dein Wissen 5:

Wie hängt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung mit der Drehzahl zusammen? Kreuze die richtige Formel an.
a) $\omega = \frac{f}{2\pi}$
b) $\omega = \frac{2\pi}{f}$
c) $\omega = 2\pi f$

**Antwort:**
Die Winkelgeschwindigkeit ist (direkt) proportional zur Drehzahl $f$, welche die Anzahl der Umdrehungen pro Zeiteinheit angibt. Der Proportionalitätsfaktor ist eine volle Umdrehung $\Delta\varphi = 2\pi$.
**Die richtige Antwort ist daher:**
**c)** $\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$

## Teste dein Wissen 6:
Kreuze die richtige Bewegungsgleichung für Drehungen eines starren Körpers an.
a) $F = m \cdot a$
b) $M = I \cdot \alpha$
c) $I = m \cdot r$

**Antwort:**
Ein Drehmoment $M$ beschleunigt die Rotationsbewegung eines starren Körpers ähnlich wie eine Kraft $F = m \cdot a$ die lineare Bewegung eines Massenpunkts verändert. Es ist das Produkt aus dem Trägheitsmoment $I$ und der Winkelbeschleunigung $\alpha$.
**Die richtige Antwort ist daher:**
**b)** $\boldsymbol{M = I \cdot \alpha}$

## Teste dein Wissen 7:
Wie berechnet man die kinetische Energie eines rotierenden starren Körpers? Kreuze an.
a) $E = m \cdot g \cdot h$
b) $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$
c) $E = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$

**Antwort:**
Die kinetische Energie der Rotation (Rotationsenergie) hängt vom Trägheitsmoment $I$ des Körpers und seiner Winkelgeschwindigkeit $\omega$ ab. Sie ist die Summe der kinetischen Energien aller Punkte des rotierenden Körpers und wächst mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit und ist umso größer, je größer das Trägheitsmoment ist. Diese Beziehung ist analog zur kinetischen Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ bei linearer Bewegung.
**Die richtige Antwort ist daher:**
**c)** $\boldsymbol{E = \frac{I \cdot \omega^2}{2}}$

## Teste dein Wissen 8:
Wie wird der Drehimpuls definiert? Kreuze die richtige Formel an.
a) $L = I \cdot v$
b) $L = m \cdot \omega$
c) $L = I \cdot \omega$

**Antwort:**
Unter dem Drehimpuls $L$ eines rotierenden Körpers versteht man das Produkt aus Trägheitsmoment $I$ und Winkelgeschwindigkeit $\omega$. Dieser ist ein Vektor und zeigt in Richtung der Winkelgeschwindigkeit. Er kennzeichnet den Bewegungszustand eines Körpers bei der Rotation.
**Die richtige Antwort ist daher:**
**c)** $\boldsymbol{L = I \cdot \omega}$

## Teste dein Wissen 9:
Wie lautet der Drehimpulssatz im nicht abgeschlossenen System? Kreuze die richtige Formel an.
a) $\frac{\Delta L}{\Delta t} = F$
b) $\frac{\Delta L}{\Delta t} = M$
c) $\frac{\Delta L}{\Delta t} = I$

**Antwort:**
Der Drehimpulssatz im nicht abgeschlossenen System besagt, dass ein von außen wirkendes Drehmoment $M$ eine zeitliche Änderung des Drehimpulses $L$ bewirkt.
**Die richtige Antwort ist daher:**
**b)** $\boldsymbol{\frac{\Delta L}{\Delta t} = M}$
Zusatz: In abgeschlossenen Systemen ($M = 0$) bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten ($L_{ges} = \text{konstant}$).

## Teste dein Wissen 10:

Wie lange benötigt die Erdachse, um den Präzessionskegel einmal zu umlaufen? Kreuze die richtige Antwort an.
a) 1 Jahr
b) 1 Tag
c) Mehrere Tausend Jahre

**Antwort:**
Die rotierende Erde verhält sich wie ein schräg gestellter Kreisel. Die Erdachse ist gegen die Normale auf die Bahnebene um 23,5° geneigt. Wegen der kleineren Entfernung zieht die Sonne den „Äquatorwulst“ auf der ihr zugewandten Seite stärker an als auf der abgewandten Seite. Neben der Sonne übt aber auch der Mond ein Dreh- bzw. Gravitationsmoment auf die Erde aus, das die Erde aufrichten möchte. Stattdessen versucht die Erdachse, sich parallel zum wirkenden Drehmoment zu stellen. Dies führt zur Präzessionsbewegung, wobei die Erdachse ca. 25.700 bis 25.800 Jahre für einen vollen Umlauf des Präzessionskegels benötigt. Ein voller Zyklus dieser Präzession wird u.a. auch *Platonisches Jahr* genannt.
**Die richtige Antwort ist daher:**
**c) Mehrere Tausend Jahre**

## Teste dein Wissen 11:

Beschreibe, wie man durch Drehung erkennen kann, ob ein Ei gekocht oder roh ist, ohne die Schale zu beschädigen.

**Beispielantwort:**
Lege das Ei vorsichtig auf eine glatte Oberfläche und versetze es in eine Drehung.
**Rohes Ei:** Ein rohes Ei wird sich beim Drehen unregelmäßig und langsamer bewegen. Das liegt daran, dass das flüssige Innere des Eis beim Drehen eine gewisse Trägheit besitzt und nicht sofort mit der Schale mitrotiert.
**Gekochtes Ei:** Ein gekochtes Ei dreht sich hingegen gleichmäßig und ruhig. Da alle Bestandteile fest sind, gibt es keine inneren Bewegungen, die die Rotation stören würden und das Innere des Eis bewegt sich somit mit der Schale mit.

## Rechenaufgabe 1:

Eine Turbine erreicht bei gleichmäßiger Beschleunigung zwei Minuten nach dem Anlaufen eine Drehzahl von 8 000 Umdrehungen pro Minute.
a) Bestimme mit welcher Winkelgeschwindigkeit die Turbine läuft.
b) Ermittle, wie groß die Winkelbeschleunigung während der Anlaufzeit war.

**Antwort:**
**a)** Um die Winkelgeschwindigkeit zu bestimmen, müssen wir zuerst die Drehzahl $f$ berechnen:

$$f = \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{Zeiteinheit}} = \frac{8\,000}{60\text{ s}} \approx 133{,}33\text{ s}^{-1}$$

Daraus ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit:

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi \cdot f \approx 838\ \mathrm{s}^{-1}}$$

**b)** Winkelbeschleunigung:
Anlaufzeit $\Delta t = 2\ \mathrm{min} = 120\ \mathrm{s}$, Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$.

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\Delta\omega}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{838\ \mathrm{s}^{-1} - 0\ \mathrm{s}^{-1}}{120\ \mathrm{s}} \approx \boldsymbol{6.98\ s^{-2}}$$

**Die Turbine läuft mit einer Winkelgeschwindigkeit von etwa $838\ \mathrm{s}^{-1}$ und beschleunigt während der Anlaufzeit mit etwa $6.98\ \mathrm{s}^{-2}$.**

## Rechenaufgabe 2:

Eine Kreissäge wird bei einer Drehzahl von 4 000 Umdrehungen pro Minute ausgeschaltet und steht bei gleichmäßiger Bremsung nach 8 s.
a) Ermittle, wie groß die anfängliche Winkelgeschwindigkeit war.
b) Bestimme, wie groß die Winkelbeschleunigung während des Auslaufens ist.
c) Berechne, wie viele Umdrehungen der Motor bis zum Stillstand macht.

**Antwort:**
**a)** Um die Anfangswinkelgeschwindigkeit zu bestimmen, müssen wir zuerst die Drehzahl $f$ berechnen:

$$f = \frac{\mathrm{Umdrehungen}}{\mathrm{Zeiteinheit}} = \frac{4\,000}{60\ \mathrm{s}} \approx 66{,}67\ \mathrm{s}^{-1}$$

Daraus ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit:

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi \cdot f \approx 419\ \mathrm{s}^{-1}}$$

**b)** Winkelbeschleunigung:
Auslaufzeit $\Delta t = 8\ s$, Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$.

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\Delta\omega}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{0\ \mathrm{s}^{-1} - 419\ \mathrm{s}^{-1}}{8\ \mathrm{s}} \approx \boldsymbol{52{,}4\ s^{-2}}$$

**c)** Die Anzahl der Umdrehungen können wir mit Hilfe der durchschnittlichen Drehzahl und der Auslaufzeit berechnen:

$$\frac{\boldsymbol{f_A + f_E}}{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{\Delta t} = \frac{66{,}67\ \mathrm{s}^{-1} + 0\ \mathrm{s}^{-1}}{2} \cdot 8\ \mathrm{s} \approx \boldsymbol{266{,}7\ \mathrm{Umdrehungen}}$$

**Die Kreissäge läuft mit einer Anfangswinkelgeschwindigkeit von etwa $419\ \mathrm{s}^{-1}$, beschleunigt während der Auslaufzeit mit etwa $52{,}4\ \mathrm{s}^{-2}$ und macht bis zum Stillstand etwa 266,7 Umdrehungen.**

## Rechenaufgabe 3:

a) Berechne die kinetische Energie der Erde (m ≈ $6{\cdot}10^{24}$ kg, Bahnradius R ≈ $150{\cdot}10^{9}$ m) auf ihrer Bahn um die Sonne.
b) Berechne die Rotationsenergie der Erde um ihre eigene Achse (Trägheitsmoment I ≈ $10^{38}$ kg·m²).
**Antwort:**
**Gegeben sind folgende Werte:**
Masse der Erde: $m_E \approx 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Radius der Erdbahn: $r_{Bahn} \approx 150 \cdot 10^{9}\ \mathrm{m}$
Rotationsperiode der Erde (Tag): $T_{\mathrm{Tag}} = 24\ \mathrm{h} = 1\,440\ \mathrm{min} = 86\,400\ \mathrm{s}$
Rotationsperiode der Erde um die Sonne (Jahr~365,25 Tage):

$T_{\text{Jahr}} = 86\,400\ \text{s} \cdot 365{,}25 = 3.156 \cdot 10^7\ \text{s}$
Erdradius $R_E \approx 6.371 \cdot 10^6\ \text{m}$

**a)** Die kinetische Energie des Massenmittelpunkts bezieht sich auf die Bewegung der Erde um die Sonne. Diese können wir mithilfe der Bahngeschwindigkeit $v_{Bahn}$ berechnen:

$$v_{Bahn} = 2\pi \cdot \frac{\text{r}_{\text{Bahn}}}{T_{\text{Jahr}}} = 2\pi \cdot \frac{150 \cdot 10^9\ \text{m}}{3.156 \cdot 10^7\ \text{s}} \approx 2{,}986 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

Nun können wir das Ergebnis in die Formel für die kinetische Energie einsetzen:

$$\boldsymbol{E_{kin}} = \boldsymbol{\frac{1}{2} m_E v_{Bahn}^2} = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}) \cdot (2.986 \cdot 10^4\ \text{m/s})^2 \approx \mathbf{2.67 \cdot 10^{33}\ J}$$

**b)** Die Rotationsenergie der Erde um ihre eigene Achse lässt sich mit der Formel für die Rotationsenergie berechnen:

$$\boldsymbol{E_{rot}} = \boldsymbol{\frac{1}{2} I \cdot \omega_{\text{Tag}}^2}$$

Das Trägheitsmoment der Erde ist bereits gegeben: $I = 10^{38}\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Nun fehlt nur noch die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation:

$$\omega_{\text{Tag}} = \frac{2\pi}{T_{\text{Tag}}} = \frac{2\pi}{86\,400\ \text{s}} \approx 7.27 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{E_{rot}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{38}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (7.27 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1})^2 \approx \mathbf{2{,}6 \cdot 10^{29}\ J}$$

**Die kinetische Energie des Massenmittelpunkts beträgt etwa $\mathbf{2.67 \cdot 10^{33}\ J}$ und die kinetische Energie der Rotationsbewegung um die eigene Achse etwa $\mathbf{2{,}6 \cdot 10^{29}\ J}$.**

## Rechenaufgabe 4:

Betrachte die Sonne als starre Kugel, die sich in etwa 25 Tagen einmal um die eigene Achse dreht, und berechne ihre kinetische Energie. (Trägheitsmoment einer massiven Kugel: $I = 0{,}4\, m \cdot R^2$. Masse der Sonne: $m \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg, Radius: $R \approx 700\,000\ \text{km} = 7 \cdot 10^8\ \text{m})$

**Antwort:**
Die kinetische Energie der Rotationsbewegung um die eigene Achse lässt sich mit der Formel für die Rotationsenergie berechnen:

$$\boldsymbol{E_{rot}} = \boldsymbol{\frac{1}{2} I \cdot \omega_{\text{Sonne}}^2}$$

Dazu bestimmen wir zuerst die Winkelgeschwindigkeit der Sonnenrotation:

$$\omega_{\text{Sonne}} = \frac{2\pi}{T_{\text{Sonne}}} = \frac{2\pi}{25 \cdot 86\,400\ \text{s}} \approx 2{,}91 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$$

Das Trägheitsmoment beträgt:

$$I = 0{,}4 \cdot (2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}) \cdot (7 \cdot 10^8\ \text{m})^2 = 3{,}92 \cdot 10^{47}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Zuletzt setzen wir die Werte in die Formel für die Rotationsenergie ein:

$$\boldsymbol{E_{rot}} = \frac{1}{2} \cdot (3{,}92 \cdot 10^{47}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2) \cdot (2{,}91 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1})^2 \approx \mathbf{1{,}66 \cdot 10^{36}\ J}$$

**Die kinetische Energie der Rotationsbewegung um die eigene Achse beträgt etwa $\mathbf{1{,}66 \cdot 10^{36}\ J}$.**