1 POTENZEN, WURZELN UND LOGARITHMEN

W 1.01 Wie ist a^k für $k \in \mathbb{N}^*$ definiert?

W 1.02 Wie ist a^k für $k \in \mathbb{Z}$ definiert?

W 1.03 Wie ist a^k für $k \in \mathbb{Q}$ definiert?

W 1.04 Wie ist a^k für $k \in \mathbb{R}$ definiert? Ist a^k jeweils für alle reellen Zahlen a definiert?

W 1.05 Wie lauten die wichtigsten Rechengesetze für Potenzen mit reellen Exponenten?

W 1.06 Wie ist $\sqrt[n]{a}$ definiert?

W 1.07 Wie lauten die wichtigsten Rechengesetze für Wurzeln?

W 1.08 Gib ein Beispiel für partielles (teilweises) Wurzelziehen an!

W 1.09 Wie ist $\log_a b$ definiert? Welche Werte kommen für a und b in Frage?

W 1.10 Warum gibt es keinen Logarithmus $\log_a b$ für $a = 1$?

W 1.11 Wie lauten die wichtigsten Rechenregeln für Logarithmen?

W 1.12 Erläutere, wie man eine Gleichung der Form $a^x = b$ lösen kann!

W 1.01 $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{k Faktoren}} \quad (a \in \mathbb{R})$

W 1.02 $a^k = \begin{cases} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a & \text{falls } k > 0 \\ 1 & \text{falls } k = 0 \\ \frac{1}{a^{-k}} & \text{falls } k < 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

W 1.03 $a^k = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad (a \in \mathbb{R}^+)$

W 1.04 a^k ist jene Zahl, die zwischen allen Zahlen a^x mit rationalem $x < k$ und allen Zahlen a^y mit rationalem $y > k$ liegt ($a \in \mathbb{R}^+$).

W 1.05 Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
$a > 1 \Rightarrow a^x > 1$ $\quad 0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^x < 1$ (jeweils für $x \in \mathbb{R}^+$)

W 1.06 Ist $n \in \mathbb{N}^*$ und $a \in \mathbb{R}^+$, so nennt man jene nichtnegative reelle Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist, die n-te Wurzel aus a und bezeichnet sie mit $\sqrt[n]{a}$.

W 1.07 Für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, alle $k, n \in \mathbb{N}^*$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $\sqrt[n]{a^n} = a$ $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k \cdot n]{a}$ $\quad \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$

W 1.08 ZB: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

W 1.09 $\log_a b$ ist jene Hochzahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten. Für a und b kommen positive reelle Zahlen mit $a \neq 1$ in Frage.

W 1.10 Wäre $a = 1$, müsste man jene Hochzahl suchen, mit der man 1 potenzieren muss, um b zu erhalten. Man müsste also die Gleichung $1^r = b$ nach r auflösen. Für $b = 1$ wäre jede reelle Zahl r eine Lösung, für $b \neq 1$ gäbe es keine Lösung. Beides hätte keinen Sinn.

W 1.11 Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$

W 1.12 Man logarithmiert die Gleichung (dh. man geht auf beiden Seiten der Gleichung zum Logarithmus über.)
Dann erhält man: $a^x = b \Rightarrow \log_{10} a^x = \log_{10} b \Rightarrow x \cdot \log_{10} a = \log_{10} b \Rightarrow x = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$