

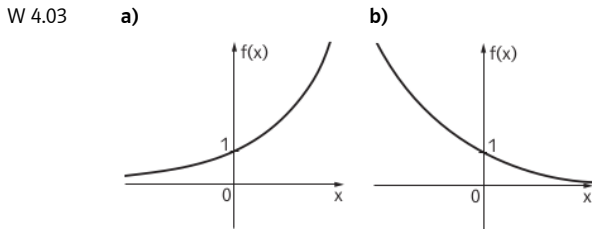
# 4 EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

- W 4.01** Was versteht man unter einer Exponentialfunktion?
- W 4.02** Was muss bei einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = c \cdot a^x$  über  $c$  und über  $a$  vorausgesetzt werden? Was bedeuten die Zahlen  $c$  und  $a$ ?
- W 4.03** Skizziere die typische Form des Graphen einer Funktion  $f: x \mapsto a^x$  für **a)**  $a > 1$ , **b)**  $0 < a < 1$ ! Durch welchen Punkt verlaufen alle diese Graphen? Was lässt sich über die Monotonie aussagen?
- W 4.04** Was lässt sich über die Graphen der Funktionen  $f: x \mapsto a^x$  und  $g: x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$  aussagen?
- W 4.05** Beschreibe Unterschiede zwischen linearem und exponentiellem Wachsen!
- W 4.06** Sei  $f(x) = a^x$ . Begründe, dass  $f(x)$  bei einer Vergrößerung von  $x$  um 1 stets um den gleichen Prozentsatz  $p\%$  vom Ausgangswert wächst bzw. fällt! Drücke  $p$  durch  $a$  aus!
- W 4.07** Ein exponentieller Wachstums- bzw. Abnahmeprozess kann durch  $N(t) = N_0 \cdot a^t$  oder  $N(t) = N_0 \cdot e^{\pm \lambda t}$  beschrieben werden. Was gibt  $N_0$  an? Für welche Werte von  $a$  liegt ein Wachstumsprozess, für welche ein Abnahmeprozess vor? Wie nennt man  $\lambda$ ? Wie hängen  $a$  und  $\lambda$  zusammen?
- W 4.08** Was versteht man unter der Verdopplungs- bzw. Halbwertszeit eines exponentiellen Wachstums- bzw. Abnahmeprozesses? Erläutere, wie man diese Zeiten berechnen kann!
- W 4.09** Was versteht man unter einer Logarithmusfunktion?
- W 4.10** Skizziere die typische Form des Graphen einer Funktion  $f: x \mapsto \log_a x$  für **a)**  $a > 1$ , **b)**  $0 < a < 1$ ! Durch welchen Punkt verlaufen alle diese Graphen? Was lässt sich über die Monotonie aussagen?
- W 4.11** Skizziere den typischen Verlauf des Graphen eines kontinuierlichen logistischen Wachstums! Beschreibe Eigenschaften der zugrundeliegenden Wachstumsfunktion  $N: t \mapsto N(t)$ !



W 4.01 Unter einer Exponentialfunktion versteht man eine reelle Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = c \cdot a^x$  (mit  $c \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq 1$ ).

W 4.02  $a$  muss eine positive reelle Zahl  $\neq 1$  sein.  $c$  muss aus  $\mathbb{R}^*$  sein.  
 $c = f(0) =$  Funktionswert an der Stelle 0  
 $a =$  Faktor, mit dem sich der Funktionswert ändert, wenn das Argument um 1 erhöht wird.



Alle Graphen verlaufen durch den Punkt  $(0 | 1)$ . Für  $a > 1$  ist  $f$  streng monoton steigend, für  $0 < a < 1$  ist  $f$  streng monoton fallend.

W 4.04 Die Graphen der Funktionen liegen symmetrisch bezüglich der 2. Achse.

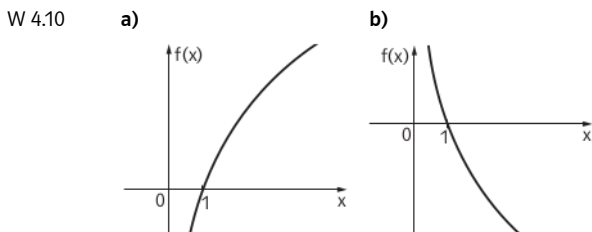
W 4.05 **Lineares Wachsen:**  
 Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt stets gleiche Zunahme der Funktionswerte.  
 ■ Die absolute Änderung  $f(x + h) - f(x)$  hängt nur von der Intervalllänge  $h$ , aber nicht von der Stelle  $x$  ab.  
 ■ Der Differenzenquotient  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  ist konstant, hängt also weder von der Intervalllänge  $h$  noch von der Stelle  $x$  ab.  
**Exponentielles Wachsen:**  
 Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt stets Zunahme der Funktionswerte mit dem gleichen Faktor bzw. um den gleichen Prozentsatz vom Ausgangswert.  
 ■ Die relative Änderung  $\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}$  hängt nur von der Intervalllänge  $h$ , aber nicht von der Stelle  $x$  ab.  
 ■ Der Änderungsfaktor  $\frac{f(x+h)}{f(x)}$  hängt nur von der Intervalllänge  $h$  ab.

W 4.06  $f(x + 1) = a^{x+1} = a^x \cdot a = f(x) \cdot a$ .  
 Setzt man  $a = 1 \pm \frac{p}{100}$ , dann gilt:  $f(x) = f(x) \cdot (1 \pm \frac{p}{100})$ . Das bedeutet eine Erhöhung bzw. Verminderung von  $f(x)$  um  $p\%$  von  $f(x)$ .  
 Für  $a > 1$  gilt:  $a = 1 + \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = 100 \cdot (a - 1)$   
 Für  $0 < a < 1$  gilt:  $a = 1 - \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = 100 \cdot (1 - a)$

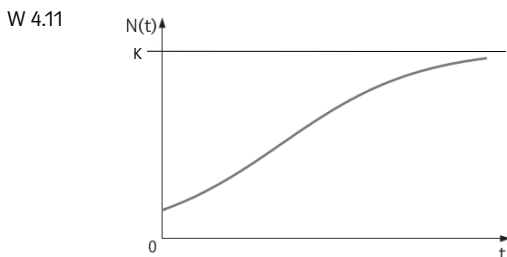
W 4.07  $N_0 = N(0) =$  Wert der betrachteten Größe  $N$  zum Zeitpunkt 0  
 Für  $a > 1$  liegt ein Wachstumsprozess, für  $0 < a < 1$  liegt ein Abnahmeprozess vor.  
 $\lambda$  heißt Wachstums- bzw. Abnahmekonstante (Zerfallskonstante).  
 Für  $a > 1$  gilt:  $a = e^\lambda$  bzw.  $\lambda = \ln a$   
 Für  $0 < a < 1$  gilt:  $a = e^{-\lambda}$  bzw.  $\lambda = -\ln a$

W 4.08 Die Verdopplungszeit  $T$  bei einem exponentiellen Wachstumsprozess gibt an, in welcher Zeitspanne sich die untersuchte Größe  $N$  jeweils verdoppelt.  $T$  ergibt sich als Lösung der Gleichung  $N(t) = 2 \cdot N_0$ .  
 Die Halbwertszeit  $T$  bei einem exponentiellen Abnahmeprozess gibt an, in welcher Zeitspanne sich die untersuchte Größe  $N$  jeweils halbiert.  $T$  ergibt sich als Lösung der Gleichung  $N(t) = 0,5 \cdot N_0$ .

W 4.09 Unter einer Logarithmusfunktion versteht man eine reelle Funktion  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = c \cdot \log_a x$  (mit  $c \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq 1$ ).



Alle Graphen verlaufen durch den Punkt  $(1 | 0)$ . Für  $a > 1$  ist  $f$  streng monoton steigend, für  $0 < a < 1$  ist  $f$  streng monoton fallend.



- Die Funktion  $N$  ist streng monoton steigend.
- Es gilt  $N_0 \leq N(t) < K$  für alle  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .
- Wenn  $K$  sehr viel größer als  $N_0$  ist (in Zeichen:  $K \gg N_0$ ), verläuft das logistische Wachstum anfänglich annähernd exponentiell.
- Für sehr große Werte von  $t$  gilt:  $N(t) \approx K$ .