Thema: Logistisches Wachstum		**Grundkompetenz:**
Name:	**Schwierigkeitsgrad:** schwierig	**Klasse:**

1. In einem Teich mit 30 m^2 Wasserfläche wachsen Seerosen. Am Beginn des ersten Tags ist eine Fläche von 1 m^2 von den Seerosen bedeckt, nach zwei Tagen bereits 2,5 m^2. Die Funktion y(t) beschreibt unter der Annahme einer kontinuierlichen logistischen Zunahme die von den Seerosen bedeckten Fläche (in m^2) nach t Tagen.
   a) Es gilt $y(t) = \frac{y_0 \cdot W}{y_0 + (W - y_0) \cdot e^{-W \cdot m \cdot t}}$. Bestimme den Proportionalitätsfaktor m.

   b) Ermittle die Fläche, die nach 12 Tagen von den Seerosen bedeckt wird.

   c) Stelle den gegebenen Kontext durch eine Differentialgleichung dar, wenn die momentane Änderung der von den Seerrosen bedeckten Fläche direkt proportional zur aktuellen Fläche und zum noch vorhandenen Freiraum ist.

2. Ein Löwenzahn misst zu Beginn der Beobachtung 1 cm. Eine Woche später hat er eine Höhe von 1,5 cm erreicht. Erfahrungsgemäß weiß man, dass ein Löwenzahn an diesem Standort maximal eine Höhe von 18 cm erreicht. Die Funktion y(t) beschreibt unter der Annahme einer kontinuierlichen logistischen Zunahme die Höhe des Löwenzahns (in cm) nach t Wochen.
   a) Es gilt $y(t) = \frac{y_0 \cdot W}{y_0 + (W - y_0) \cdot e^{-W \cdot m \cdot t}}$. Bestimme den Proportionalitätsfaktor m.

   b) Ermittle die Höhe des Löwenzahn nach 4 bzw. 5 Wochen.

   c) Stelle den gegebenen Kontext durch eine Differentialgleichung dar, wenn die momentane Änderung der Höhe des Löwenzahns zu jedem beliebigen Zeitpunkt direkt proportional zur aktuellen Höhe und zum noch vorhandenen Freiraum ist.

3. Die Funktion y(t) beschreibt die nach t Stunden von einem Pilz bedeckte Fläche in mm^2. Zu Versuchsbeginn beträgt diese Fäche 25 mm^2, maximal können 100 mm^2 des Nährbodens vom Pilz bedeckt werden. Die momentane Änderungsrate der vom Pilz bedeckten Fläche zu jedem beliebigen Zeitpunkt ist direkt propotional zur aktuell bedeckten Fläche und zum noch vorhandenen Freiraum. Für den Proportionalitätsfaktor gilt m = 0,0018.
   a) Beschreibe den Sachverhalt durch eine Differentialgleichung.

   b) Gib die Lösung der Differentialgleichung an und bestimme das Maß der Fläche, die nach acht Stunden vom Pilz bedeckt wird.

Thema: Lösungen - Logistisches Wachstum		**Grundkompetenz:**
Name:	**Schwierigkeitsgrad:** schwierig	**Klasse:**

1. In einem Teich mit 30 m² Wasserfläche wachsen Seerosen. Am Beginn des ersten Tags ist eine Fläche von 1 m² von den Seerosen bedeckt, nach zwei Tagen bereits 2,5 m². Die Funktion y(t) beschreibt unter der Annahme einer kontinuierlichen logistischen Zunahme die von den Seerosen bedeckten Fläche (in m²) nach t Tagen.

   a) Es gilt $y(t) = \frac{y_0 \cdot W}{y_0 + (W - y_0) \cdot e^{-W \cdot m \cdot t}}$. Bestimme den Proportionalitätsfaktor m.

   $y_0 = 1$; W = 30; t = 2; y(2) = 2,5 → $2{,}5 = \frac{1 \cdot 30}{1+(30-1) \cdot e^{-30 \cdot m \cdot 2}}$ → m ≈ 0,01616 (mit Technologie)

   b) Ermittle die Fläche, die nach 12 Tagen von den Seerosen bedeckt wird.

   $y(t) = \frac{30}{1+29 \cdot e^{-0{,}4847 \cdot t}}$ → y(12) ≈ 27,6 m²

   c) Stelle den gegebenen Kontext durch eine Differentialgleichung dar, wenn die momentane Änderung der von den Seerrosen bedeckten Fläche direkt proportional zur aktuellen Fläche und zum noch vorhandenen Freiraum ist.

   y'(t) = 0,01616 · y(t) · (30 – y(t))

2. Ein Löwenzahn misst zu Beginn der Beobachtung 1 cm. Eine Woche später hat er eine Höhe von 1,5 cm erreicht. Erfahrungsgemäß weiß man, dass ein Löwenzahn an diesem Standort maximal eine Höhe von 18 cm erreicht. Die Funktion y(t) beschreibt unter der Annahme einer kontinuierlichen logistischen Zunahme die Höhe des Löwenzahns (in cm) nach t Wochen.

   a) Es gilt $y(t) = \frac{y_0 \cdot W}{y_0 + (W - y_0) \cdot e^{-W \cdot m \cdot t}}$. Bestimme den Proportionalitätsfaktor m.

   $y_0 = 1$; W = 18; t = 1; y(1) = 1,5 → $1{,}5 = \frac{1 \cdot 18}{1+(18-1) \cdot e^{-18 \cdot m \cdot 1}}$ → m ≈ 0,02418 (mit Technologie)

   b) Ermittle die Höhe des Löwenzahn nach 4 bzw. 5 Wochen.

   $y(t) = \frac{18}{1+17e^{-0{,}4353 \cdot t}}$ → y(4) ≈ 4,52 cm   y(5) ≈ 6,15 cm

   c) Stelle den gegebenen Kontext durch eine Differentialgleichung dar, wenn die momentane Änderung der Höhe des Löwenzahns zu jedem beliebigen Zeitpunkt direkt proportional zur aktuellen Höhe und zum noch vorhandenen Freiraum ist.

   y'(t) = 0,02418 · y(t) · (18 – y(t))

3. Die Funktion y(t) beschreibt die nach t Stunden von einem Pilz bedeckte Fläche in mm². Zu Versuchsbeginn beträgt diese Fäche 25 mm², maximal können 100 mm² des Nährbodens vom Pilz bedeckt werden. Die momentane Änderungsrate der vom Pilz bedeckten Fläche zu jedem beliebigen Zeitpunkt ist direkt propotional zur aktuell bedeckten Fläche und zum noch vorhandenen Freiraum. Für den Proportionalitätsfaktor gilt m = 0,0018.

   a) Beschreibe den Sachverhalt durch eine Differentialgleichung.

   y'(t) = 0,0018 · y(t) · (100 – y(t))

   b) Gib die Lösung der Differentialgleichung an und bestimme das Maß der Fläche, die nach acht Stunden vom Pilz bedeckt wird.

   $y(t) = \frac{25 \cdot 100}{25+(100-25) \cdot e^{-100 \cdot 0{,}0018 \cdot t}} = \frac{2500}{25+74e^{-0{,}18 \cdot t}}$ y(8) ≈ 58,5 mm²