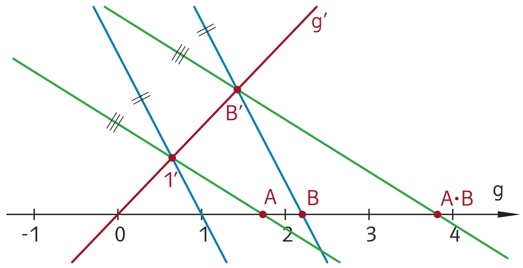
Multiplikation und Division auf der Zahlengeraden

Multiplikation
Wir führen nun die Multiplikation von Punkten auf der Zahlengeraden zeichnerisch ein.
Wir benötigen dazu nur Bleistift, Lineal und Dreieck. Damit können wir

- durch je zwei Punkte eine Gerade zeichnen und
- eine Gerade in einen Punkt parallel verschieben.

Wenn wir zwei Punkte A und B auf der Zahlengeraden g multiplizieren wollen, gehen wir so vor:

- Wir zeichnen eine Gerade g′ ein, die die Gerade g im Punkt 0 schneidet, und wählen auf der Geraden g′ einen von 0 verschiedenen Punkt 1′.
- Dann zeichnen wir die Gerade durch 1 und 1′ ein und verschieben diese Gerade parallel in den Punkt B. Den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden g′ bezeichnen wir mit B′.



- Schließlich zeichnen wir die Gerade durch A und 1′ ein und verschieben sie parallel in den Punkt B′.

Produkt

Den Schnittpunkt der parallel verschobenen Geraden mit g nennen wir dann A · B, das **Produkt** der Punkte A und B. Die **Faktoren** von A · B sind A und B. Die Punkte A und B **multiplizieren** heißt, ihr Produkt A · B ermitteln.

Zahlengerade
reelle Zahlen

Wenn wir auf einer Geraden die Punkte 0 und 1 wählen und dann die Punkte der Geraden wie oben angegeben addieren und multiplizieren, dann nennen wir diese Gerade eine **Zahlengerade** und ihre Punkte **reelle Zahlen**.

Wir haben gesehen, wie man jede natürliche Zahl auf der Zahlengeraden darstellen kann. Summe und Produkt von natürlichen Zahlen stimmen dann mit Summe und Produkt der entsprechenden Punkte überein. Wir machen daher keinen Unterschied mehr zwischen einer natürlichen Zahl und dem entsprechenden Punkt auf der Zahlengeraden. Jede natürliche Zahl und jede ganze Zahl ist also auch eine reelle Zahl. Statt „reelle Zahl" sagen wir im Weiteren oft einfach „Zahl".

Division
Zu jedem von 0 verschiedenen Punkt B auf der Zahlengeraden, gibt es einen Punkt, wir bezeichnen ihn mit 1/B (sprich: „1 durch B") oder B^{-1} (sprich: „B hoch minus 1") so, dass $B \cdot 1/B = B \cdot (B^{-1}) = 1$ ist.

Wir können B^{-1} so konstruieren:

- Wir zeichnen die Gerade g′, den Punkt 1′ und den Punkt B′ wie bei der Multiplikation.
- Dann zeichnen wir die Gerade durch B′ und 1 ein und verschieben sie parallel in den Punkt 1′.
- Der Schnittpunkt der parallel verschobenen Geraden mit g ist B^{-1}. Multipliziert man diesen Punkt nun wie oben mit B, erhält man 1.