11 Rotationen

Vertiefung und Kompetenzüberprüfung

Martin Apolin (Stand Mai 2011)

Allgemein

A1 Ein Käfer fährt auf dem Rand einer Scheibe Karussell. Nun krabbelt er in Richtung des Mittelpunktes der Scheibe. Nehmen folgende Größen des Systems Insekt-Scheibe dabei zu oder ab oder bleiben sie gleich: a) Drehmasse, b) Drehimpuls, c) Winkelgeschwindigkeit?

Drehwinkel, Drehgeschwindigkeit, Drehmasse

A2 Die Sonne rotiert um ihre eigene Achse. Diese Rotation dauert am Äquator 25,4 Tage, in mittleren Breiten 27 bis 28 Tage und nahe den Polen 36 Tage. Man nennt das differentielle Rotation. Berechne Winkelgeschwindigkeit und Tangentialgeschwindigkeit eines Punktes am Äquatorpunkt. Der Sonnenradius beträgt etwa $7 \cdot 10^8$ m. Vergleich diese Geschwindigkeit mit der Tangentialgeschwindigkeit eines Äquatorpunktes auf der Erde (siehe Abb. 1.6, S. 107).

Abb. 1: Größenvergleich zwischen Sonne und Erde. Der Sonnendurchmesser ist rund 100-mal so groß (Quelle: NASA).

A3 Der Neutronenstern mit der etwas sperrigen Bezeichnung *PSR J1748-2446ad* rotiert mit sagenhaften 716 Umdrehungen pro Sekunde. Er ist der am schnellsten rotierende Neutronenstern, der momentan bekannt ist (Stand 2011). Sein Radius beträgt etwa 16 km. Berechne die Tangentialgeschwindigkeit am Äquator, gib aber vorher einen Tipp ab.

A4 a In Kap. 6.2 (S. 52) ist das Bummeltempo mit Hilfe der Schwingungsdauer eines Pendels abgeschätzt. Dabei haben wir vereinfacht angenommen, dass sich das Bein wie ein Pendel verhält, dessen Pendellänge der halben Beinlänge entspricht. Warum ist das eigentlich geschummelt? Lies dazu auch in Kap. 14.1 nach.

A4 b Du kannst die Schwingungsdauer jedes beliebigen Objekts berechnen. Du musst dazu die Drehmasse *(I)* und den Abstand zwischen Drehpunkt und KSP (*d*) kennen. Die Gleichung für die Schwingungsdauer lautet dann folgendermaßen: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$. Zeige, dass bei einem mathematischen Pendel, bei dem sich die gesamte Masse im Abstand *d* befindet, diese Gleichung in $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ übergeht.

A4 c Berechne noch einmal das Bummeltempo. Nimm aber diesmal nicht die Gleichung für ein mathematisches Pendel, sondern die allgemeine Pendelgleichung. Nimm an, dass das Bein vereinfacht einem Stab entspricht und suche die Drehmasse aus Tab. 11.1 (S. 108).

A5 Wenn man die Drehmasse eines Objekts um eine bestimmte Achse kennt, dann kann man sich ausrechnen, wie groß die Drehmasse um jede beliebige andere Achse ist, die zur ursprünglichen parallel liegt (Abb. 2): $I_{neu} = I + mx^2$. Man nennt das den Satz von Steiner. *m* ist dabei die Masse des Objekts und *x* der Normalabstand der beiden Achsen. Überprüfe mit diesem die beiden untersten Angaben in Tab. 11.1, S. 108.

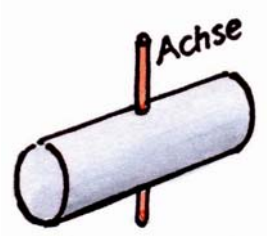

Abb. 2: Wenn man die Drehmasse *I* dieses Objekts kennt…

…dann kann man sofort die Drehmasse I_{neu} bezüglich dieser Achse ausrechnen.

A6 Berechne die absolute Drehmasse eines Eisläufers mit angezogenen und ausgestreckten Armen. Verwende dazu das einfache Modell aus Abb. 3, die Drehmassen aus Tab. 11.1 (S. 108, BB5), die Massen der Körperteile aus Tab. 1 unten und den Satz von Steiner. Wie weit musst du ein einziges Kilogramm von der Drehachse entfernen, damit du dieselbe Drehmasse erhältst?

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

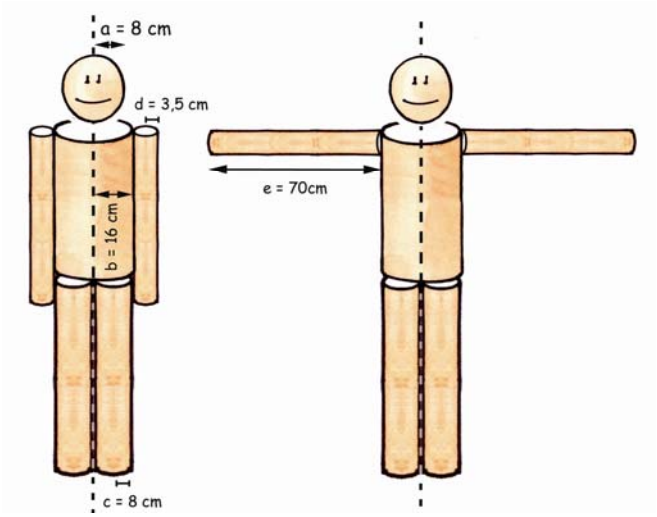

Abb. 3: Ein sehr vereinfachtes biomechanisches Modell (Grafik: Janosch Slama und Martin Apolin).

	Masse [kg]
Kopf	5,5
2·(Arm + Hand)	2·4
Rumpf	33
2·(Bein + Fuß)	2·11,5
Summe	69,5

Tab.1: Absolute Massen der Körperteile für eine Person mit 69,5 kg (vereinfacht nach Brüggemann 1984).

A7 Der Durchmesser unserer Galaxis beträgt rund 100.000 Lichtjahre (LJ; siehe Abb. 4). Die Sonne ist etwa 25.000 LJ von Zentrum unserer Galaxis entfernt. Sie bewegt sich mit etwa 220 km/s um das Zentrum. Wie lange dauert ein voller Umlauf? Wie oft ist die Erde seit ihrer Entstehung schon um das Zentrum der Milchstraße gelaufen? Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $3 \cdot 10^8$ m/s.

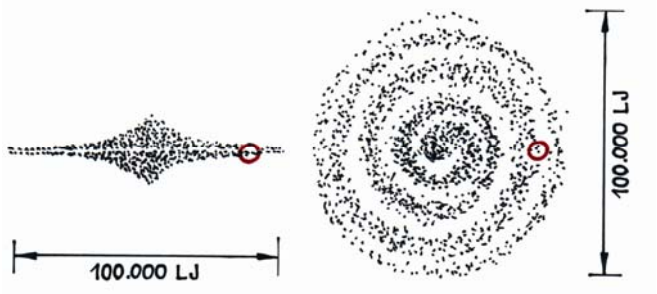

Abb. 4: Unsere Milchstraße von der Seite und von oben (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 12.33).

Drehmoment

A8 Die Einheit der Arbeit ist Nm. Das Drehmoment hat auch die Einheit Nm. Ist das Drehmoment eine Arbeit?

A9 a Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Leistung eines Autos und dem Drehmoment? Versuche allgemein herzuleiten.

A9 b Der Bugatti Veyron (Abb. 5) ist ein Supersportwagen mit einer Maximalgeschwindigkeit über 400 km/h. Seine maximale Leistung ist mit 882 kW (1200 PS) bei 6400 U/min angegeben. Berechne das Drehmoment. Sein maximales Drehmoment liegt bei 5000 U/min bei 1500 Nm. Berechne die Leistung. Was fällt auf?

Abb. 5: Der Bugatti Veyron (Foto: Softeis; Quelle: Wikipedia)

A10 Mit der sogenannten Schwerpunktwaage (Abb. 6) kann man die Lage des Schwerpunkts (siehe Kap. 5) in der Längsachse einer Person bestimmen (also wenn sie steht die Höhe des KSP). Bei der Schwerpunktwaage handelt es sich um eine harte Unterlage, die in unserem Fall links auf einer Waage liegt und rechts einen festen Drehpunkt hat. Zuerst wird die Unterlage alleine gemessen. Unsere Waage soll dabei 300 N anzeigen. Wie groß ist das Gewicht der Unterlage? Nimm an, dass sich der Schwerpunkt der Unterlage genau in der Mitte befindet.

Abb. 6: Eine Schwerpunktwaage (Grafik: Jansoch Slama und Martin Apolin).

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

Dann legt sich die Person (Gewicht 800 N) so auf das Brett, dass die Fußsohlen genau über dem Drehpunkt liegen. Die Waage auf der linken Seite zeigt nun 750 N. In welcher Entfernung von der Drehachse befindet sich der Schwerpunkt der Person?

Drehimpulserhaltung

A11 Bei ihrem Vorbeiflug am Planeten Uranus 1986 begann die Raumsonde Voyager 2 immer dann zu rotieren, wenn an Bord ein Kassettenrekorder eingeschaltet war. Wie kann man diesen eigenartigen Effekt erklären?

A12 Wenn das Wasser an den Polkappen restlos schmilzt, dann steigt das Wasser in den Meeren um rund 30 m. Welche Auswirkung hätte das auf die Drehgeschwindigkeit der Erde? Nimm dazu an, dass die Drehmasse des Eises null ist, weil sich dieses praktisch in der Drehachse befindet. Die Masse der Erde beträgt $6 \cdot 10^{24}$ kg, ihr Radius 6370 km. Die Drehmasse einer Hohlkugel mit vernachlässigbarer Wandstärke beträgt $(2/3)mr^2$. Das Volumen einer Kugel beträgt $V = (4r^3\pi)/3$.

A13 Das 2. Kepler'sche Gesetz besagt: Die Linie zwischen einem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeitabschnitten gleiche Flächen (siehe Abb. 7; siehe Kap. 12.3, BB6). Die Tangentialgeschwindigkeit von Planeten ist also größer, wenn sich diese in der Nähe der Sonne befinden. Hast du eine Erklärung dafür?

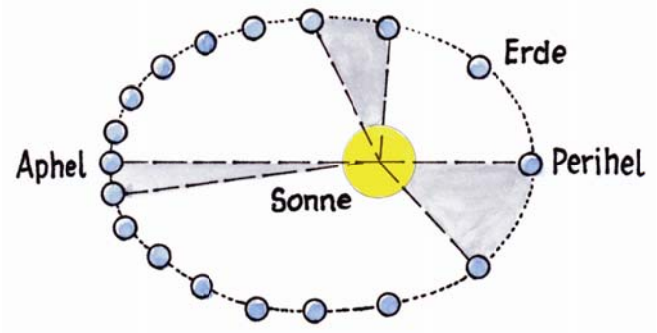

Abb. 7: Abb. 12.19: Die Position der Erde in gleichen Zeitabständen (die Ellipsenbahn ist stark übertrieben). Die Flächen sind alle gleich groß (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 12.19, Kap. 12.3, BB6).

A14 Die Gezeiten bremsen die Erde ab. Weil der Gesamtimpuls erhalten bleibt, muss sich dadurch der Mond von der Erde entfernen. Dieses Entfernen geht so lange, bis die Eigenrotation der Erde (also die Länge eines Tages) genauso lange dauert wie ein Umlauf des Mondes um die Erde.

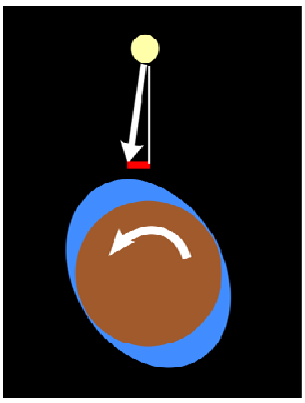

Abb. 8: Die Flutberge der Gezeiten und der Mond (Grafik: Loki 66; Quelle: Wikipedia).

a Warum entfernt sich der Mond nicht mehr von der Erde, wenn sich ihre Rotationsgeschwindigkeiten angeglichen haben? Und woher weiß der Mond, dass er sich entfernen „muss"? Er ist ja nicht direkt mit der Erde verbunden? Hilf dir mit Abb. 8! Mond und Erde rotieren in dieser Darstellung gegen den Uhrzeigersinn.

Die folgenden Angaben brauchst du für die Berechnungen in b bis e: Masse der Erde $6 \cdot 10^{24}$ kg, Radius der Erde $6{,}37 \cdot 10^6$ m, Masse des Mondes $7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg, durchschnittliche Entfernung Erde-Mond 380.000 km ($3{,}8 \cdot 10^8$ m), Zeit für einen vollen Umlauf des Mondes um die Erde 27,3 Tage.

b Das 3. Kepler'sche Gesetz (Kap. 12.3, BB6) gilt nicht nur für Planeten, sondern kann auf alle Bewegungen einer kleinen Masse um eine große Zentralmasse angewendet werden. Berechne den Wert von C für die Bewegung des Mondes um die Erde. Du brauchst diesen Wert später noch.

c Welcher formelmäßige Zusammenhang besteht zwischen der Umlaufzeit des Mondes und seiner Winkelgeschwindigkeit?

d Berechne den Drehimpuls des Systems Erde – Mond.

e Berechne die Entfernung des Mondes und die Dauer für einen Umlauf um die Erde, wenn dieser seine maximale Entfernung erreicht hat. Der Umlauf des Mondes um die Erde entspricht dann der Dauer eines Erdtages. Nimm dazu vereinfacht an, dass in dieser Situation der

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

Drehimpuls der Erde, der bereits jetzt nur rund ¼ des Drehimpulses des Mondes beträgt, zu vernachlässigen ist. Berechne weiters die Entfernung, in der sich der Mond dann befindet.

Drehenergie

A15 Ein Vollzylinder und ein Hohlzylinder mit gleicher Masse rollen eine schiefe Ebene hinunter. Der Vollzylinder kommt schneller unten an und hat daher auch eine höhere Geschwindigkeit (siehe auch F4, S. 108). Berechne allgemein, um wie viel größer diese Geschwindigkeit ist. Die Drehmasse eines Hohlzylinders mit vernachlässigbarer Wanddicke ist mr^2. Die Drehmasse des Vollzylinders findest du in Tab. 11.1, S. 108.

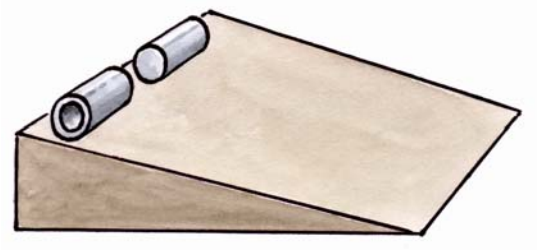

Abb. 9 (siehe Abb. 11.9, S. 108)

A16 Du hast eine Stahlkugel mit einem Radius von 1 cm. Berechne **a)** die Masse dieser Kugel (siehe Dichtetabelle 2.4, S. 18, Kap. 2.6). Berechne **b)** die Aufprallgeschwindigkeit, wenn du diese Kugel aus 1 m Höhe aufprallen lässt. Berechne **c)** die Rollgeschwindigkeit der Kugel am Fuße einer Rampe mit einem Höhenunterschied von 1 m.

A17 Du hast zwei gleich große und schwere Eier: eines ist gekocht, das andere roh. Du lässt sie eine schiefe Ebene runter rollen. Welches kommt schneller unten an? Begründe mit der Rotationsenergie sowie mit der Drehmasse.

Kräfte in rotierenden Systemen

A18 a Die internationale Raumstation ISS (Abb. 10) fliegt in durchschnittlich rund 350 km über der Erdoberfläche. Sie benötigt für einen Umlauf um die Erde etwa 91 min. Der Radius der Erde beträgt 6370 km. Berechne die Zentripetalbeschleunigung. Welchen Wert erwartest du?

b Sehr oft hört oder liest man, dass im Orbit – etwa auf der ISS – deshalb Schwerelosigkeit herrscht, weil es dort keine Gravitation mehr gibt. Stimmt das? Erstelle dazu ein Diagramm das zeigt, wie die Erdbeschleunigung g mit der Höhe absinkt. Du brauchst dazu das Newton'sche Gravitationsgesetz (siehe Kap. 31.1, BB6). Nimm die Masse der Erde mit $6 \cdot 10^{24}$ kg an. Berechne g für eine Höhe von 350 km und vergleiche den Wert mit der Lösung aus A18 a. Um wie viel ist g am Äquator auf Grund der Zentrifugalkraft geringer?

Abb. 10: Die Internationale Raumstation (International Space Station oder kurz ISS), aufgenommen aus dem Space Shuttle Discovery 2011 (Quelle: NASA).

A19 a Welchen Krümmungsradius müssen Kurven einer Autobahn mindestens haben, wenn sie bei trockenem Wetter mit Geschwindigkeiten bis zu 160 km/h zu befahren sein sollen? Hilf dir mit Tab. 2 und lies zur Reibungskraft in Kap. 8.4.2 nach. Gib vor der Rechnung einen Tipp ab.

Stoffpaare	Haftreibungszahl	Gleitreibungszahl
Holz auf Stein	0,7	0,3
Gummi auf Beton (trocken)	0,65	0,5
Gummi auf Beton (nass)	0,4	0,35
Gummi auf Eis (trocken)	0,2	0,15
Gummi auf Eis (nass)	0,1	0,08
Stahl auf Teflon	0,04	0,04
Schlittschuh auf Eis	0,03	0,01

Tab. 2: Reibungszahlen für verschiedene Materialien (siehe auch Tab. 8.1, Kap. 8.4.2, BB5).

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

b Bei Straßen befinden sich vor und nach Kurven so genannte Klothoiden, Übergangsbögen zwischen der Geraden und der Kurve. In diesen Übergangbögen nimmt der Radius linear ab, bis man den gewünschten Kurvenradius erreicht hat (Abb. 11). Warum macht man das?

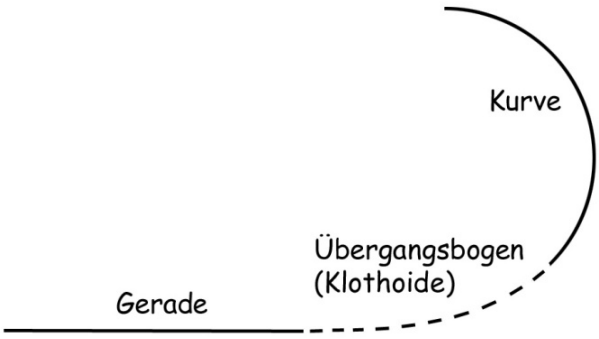

Abb. 11: Der Übergangsbogen zwischen der Geraden und der eigentlichen Kurve bei einer Autostraße.

A20 a Der genaue Wert der Erdbeschleunigung g lässt sich nur berechnen, wenn die exakte Form der Erde und die Verteilung der Masse darin bekannt ist – oder er lässt sich mit Präzisionsinstrumenten messen (siehe Abb. 12).

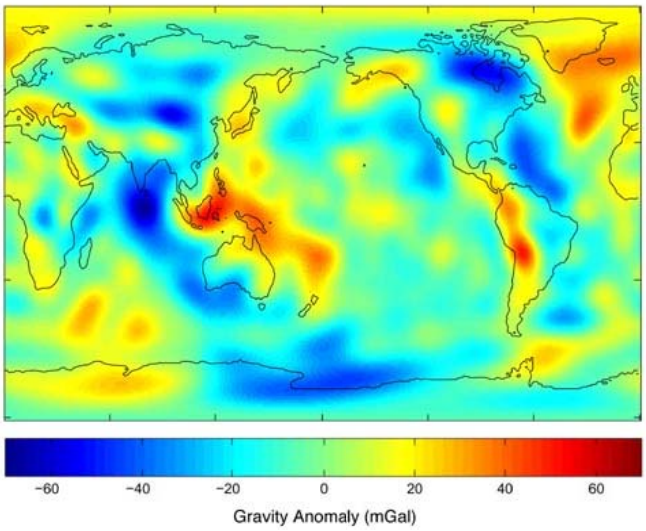

Abb. 12: Abweichung zwischen dem theoretischen Wert von g und dem von den Doppelsatelliten Gravity Recovery And Climate Experiment (GRACE) gemessenen Werten. In roten Bereichen ist der gemessene Wert höher, in blauen tiefer als vorhergesagt. Ein Milligal entspricht 0,01 mm/s² (Quelle: NASA; siehe auch Abb. 6.18, S. 54, BB5).

Man kann aber recht brauchbare Werte auf einfachem Weg abschätzen. Berechne die Fallbeschleunigung g am Pol und am Äquator durch Gleichsetzung der Gewichtskraft $F_G = mg$ mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz (siehe Kap. 13.1, BB6). Berücksichtige einerseits, dass der Erdradius in Richtung der Pole 6356,78 km, ~~und~~ in Richtung Äquator 6378,16 km beträgt und andererseits die Zentrifugalkraft am Äquator. Nimm für die Masse der Erde den exakten Wert $5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg und für die Gravitationskonstante $6{,}67428 \cdot 10^{-11}$ $m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Vergleich die abgeschätzten Werte mit den Werten in Tab. 3. Wie groß ist die Abweichung in Prozent?

Ort	g
Graz	9,8070 m/s²
Wien	9,8086 m/s²
Pol	9,832 m/s²
Äquator	9,780 m/s²
Mond	1,63 m/s²

Tab. 3: Gemessene Erdbeschleunigung an verschiedenen Punkten der Erde (siehe Tab. Tab. 14.1, Kap. 14.1, BB6).

b Wie kann man die geringere Fallbeschleunigung am Äquator aus der Sicht eines außenstehenden, nichtrotierenden Beobachters erklären. Für diesen gibt es ja keine Zentrifugalkraft!

A21 a In Abb. 13 siehst du eine Raumstation. Ihr Radius soll 90 m betragen. Wie schnell muss diese Raumstation rotieren, damit man im Inneren eine künstliche Gravitation von 1 g (10 m/s²) erzeugen kann? Wie viel Grad Drehung entspricht das in einer Sekunde? Wie groß ist die Tangentialgeschwindigkeit? In welche Richtung würde diese Gravitation dann wirken – wie müssten die Menschen z. B. stehen?

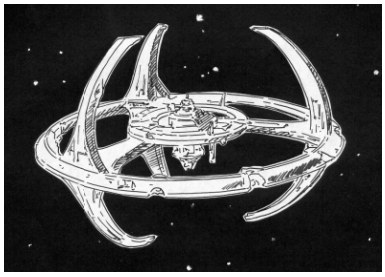

Abb. 13 (Grafik: Janosch Slama)

b Nimm an, auf der Raumstation werden intergalaktische Meisterschaften im 100-m-Lauf ausgetragen. Was passiert mit den Läufern, wenn sie in bzw. gegen die Rotationsgeschwindigkeit mit 10 m/s laufen? Was würden sie beim Laufen im Körper und auch in den Beinen spüren? Hilf dir mit Abb. 14.

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

Abb. 14: Schwung- und Stützphase der Füße beim Laufen. Rund die Hälfte der Zeit sind die Füße relativ zum Boden in Ruhe (Stützphase). Was bedeutet das für die Geschwindigkeit der Füße in der Schwungphase und somit auch für die wirkenden Kräfte? (Grafik: Janosch Slama)

A22 Der Polarstern steht ziemlich genau im Norden (Abb. 15). War das immer so? Und wird das auch in Zukunft so bleiben? Bedenke, dass die Erde ein Kreisel ist!

Abb. 15: Die scheinbare Sterndrehung. Nur der Polarstern ist (fast) in Ruhe (siehe auch Abb. 12.8, Kap. 12.2, BB6).

A23 Abbildung 16 zeigt einen Kreisel, der in einem Schwimmer so montiert ist, dass sich seine Achse nur horizontal bewegen kann. Durch die Erdrotation käme er nach einiger Zeit in Position II. Seine Achse würde also gekippt. Wie wird sich der Kreisel aber tatsächlich verhalten?

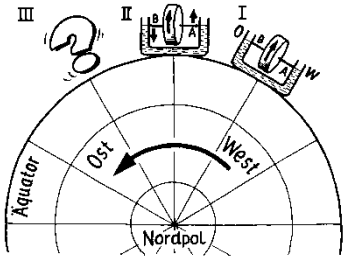

Abb. 16 (Grafik: Janosch Slama)

Hilfe zu A1: a) Die Drehmasse nimmt ab, weil sich die Massenpunkte der Drehachse nähern. **b)** Der Drehimpuls muss konstant bleiben, weil keine Drehmomente von außen einwirken. **c)** Weil die Drehmasse sinkt, muss bei konstantem Drehimpuls die Winkelgeschwindigkeit steigen.

Hilfe zu A2: Die Sonne dreht sich am Äquator in 25,4 Tagen oder $2{,}19 \cdot 10^6$ Sekunden um 360 °. Die Winkelgeschwindigkeit beträgt daher $1{,}64 \cdot 10^{-4}$ °/s oder $2{,}86 \cdot 10^{-6}$ rad/s. Der Umfang der Sonne beträgt $4{,}4 \cdot 10^9$ m. Die Tangentialgeschwindigkeit beträgt daher rund 2 km/s. Das entspricht beinahe der 6-fachen Schallgeschwindigkeit und ist etwa 4,3-mal so schnell wie bei einem Äquatorpunkt auf der Erde.

Hilfe zu A3: Der Umfang des Neutronensterns beträgt 100,5 km oder rund 10^5 m. Weil sich der Stern 716-mal pro Sekunde dreht, legt ein Äquatorpunkt daher $716 \cdot 10^5$ m/s $\approx 7{,}2 \cdot 10^7$ m/s zurück. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $3 \cdot 10^8$ m/s. Ein Äquatorpunkt bewegt sich daher mit rund ¼ der Lichtgeschwindigkeit.

Andere Berechnungsmöglichkeit: Eine Umdrehung sind 2π rad, 716 Umdrehungen rund 4500 rad. ω ist daher 4500 s^{-1}. Für die Bahngeschwindigkeit ergeben sich dann $v = \omega r = 7{,}2 \cdot 10^7$ m/s.

Hilfe zu A4 a: Diese Gleichung gilt nur für mathematische Pendel. Bei diesen (theoretischen) Pendeln hat die Pendelschnur keine Masse, und diese ist dafür an einem Punkt am unteren Ende vereint. Ein Fadenpendel kommt dem recht nahe, ein Bein jedoch nicht. Bei der Drehmasse wirken sich nämlich weiter von der Drehachse entfernte Massenpunkte stärker aus, weil die Drehmasse proportional zu r^2 ist.

Hilfe zu A4 b: Die Drehmasse wird so berechnet: $I = \sum m_i r_i^2$. Für einen Massenpunkt ist die Drehmasse daher mr^2. Wenn man das in die allgemeine Pendelgleichung einsetzt ($d = l$), bekommt man wieder die Pendelgleichung für ein mathematisches Pendel: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{md^2}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$. d ist der Abstand der Masse vom Drehpunkt, also quasi die Pendellänge.

Hilfe zu A4 c: Wie ist es, wenn die Masse nicht auf einen Punkt konzentriert ist? Nehmen wir als Beispiel einen schwingenden Stab (Länge = l). Dieser hat eine

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

Drehmasse von $(ml^2)/3$ (siehe Tab. 11.1, S. 108, BB5). Der KSP eines solchen Stabs befindet sich in der Mitte. d ist daher $l/2$. Das setzen wir oben ein und bekommen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{3mg\frac{l}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}l}{g}}$$

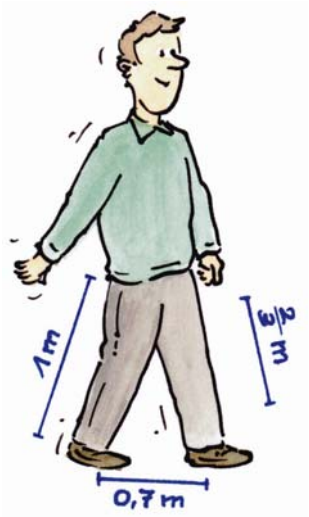

Abb. 17: Ein Bein mit 1 m Länge hat eine Schwingungsdauer wie ein mathematisches Pendel mit 2/3 m Länge (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 14.7, BB6).

Ein Stab von einem Meter Länge hat also dieselbe Schwingungsdauer wie ein mathematisches Pendel mit 2/3 m Länge. Damit können wir das Bummeltempo genauer abschätzen. Nehmen wir vereinfacht an, dein Bein verhält sich wie ein 1 m langer Stab. Ein Schritt ist eine halbe Schwingung, und die Schwingungsdauer beträgt daher:

$$T_{Schritt} = \pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{g}} = \sqrt{\frac{2}{3g}} \approx 0{,}8\ \text{s}$$

Wenn du das Bein ohne Anstrengung schwingen lässt, dann dauert ein Schritt also 0,8 s. Wenn dein Schritt 0,7 m lang ist, ergibt das eine Geschwindigkeit von $v = s/t = 0{,}7\ \text{m}/0{,}8\ \text{s} = 0{,}88$ m/s oder rund 3 km/h. Die ganz grobe Schätzung kommt auf 1 m/s und ist daher auch nicht so schlecht.

Hilfe zu A5: Die Drehmasse des Stabes, bei dem die Achse durch den Schwerpunkt geht lautet $I = (1/12)ml^2 + m(l/2)^2 = (1/12)ml^2 + (1/4)ml^2 = (1/3)ml^2$.

Hilfe zu A6: Berechnen wir zunächst die Drehmasse des Rumpfes ohne Arme. Der Kopf hat die Drehmasse einer Kugel mit dem Radius a = 0,08 m und einer Masse von 5,5 kg (siehe Tab. 4). Der Rumpf hat die Drehmasse eines Zylinders mit dem Radius $b = 0{,}16$ m und einer Masse von 33 kg. Bein und Fuß haben bezüglich ihrer Längsachse die Drehmasse eines Zylinders mit dem Radius $c = 0{,}08$ m und einer Masse von 11,5 kg. Sie rotieren aber nicht um die Längsachse, sondern um eine Achse, die in ihrer Mantelfläche liegt. Also kommt nach dem Satz von Steiner noch der Wert mc^2 dazu. Außerdem musst du berücksichtigen, dass der Eisläufer zwei Beine hat. In Summe macht das eine Drehmasse von 0,656 kgm², wobei rund 2/3 auf den Einfluss des Rumpfes zurückzuführen sind.

		Drehmasse
Kopf	$m = 5{,}5$ kg $a = 0{,}08$ m	$I = (2/5)ma^2 =$ 0,014 kgm²
Rumpf	$m = 33$ kg $b = 0{,}16$ m	$I = (1/2)mb^2 =$ 0,422 kgm²
Bein + Fuß	$m = 11{,}5$ kg $c = 0{,}08$ m	$I = (1/2)cr^2 + mc^2 =$ 0,110 kgm²
Summe der Drehmassen für Kopf, Rumpf und beide Beine		0,656 kgm²
Arm + Hand angezogen	$m = 4$ kg $d = 0{,}035$ m	$I = (1/2)md^2 +$ $m(b+d)^2 =$ 0,155 kgm²
Drehmasse des Körpers mit angezogenen Armen		0,966 kgm²
Arm + Hand gestreckt	$m = 4$ kg $e = 0{,}7$ m	$I = (1/3)me^2 + mb^2 =$ 0,756 kgm²
Drehmasse des Körpers mit ausgestreckten Armen		2,179 kgm²

Tab. 4 zu A6

Nun berechnen wir die Drehmasse der angezogenen Arme. Arm und Hand haben bezüglich ihrer Längsachse die Drehmasse eines Zylinders mit dem Radius $d = 0{,}035$ m und einer Masse von 4 kg. Sie rotieren aber nicht um die Längsachse, sondern um eine Achse, die um $b + d$ von ihrer Längsachse entfernt liegt. Also kommt nach dem Satz von Steiner noch der Wert $m(b+d)^2$ dazu. Außerdem musst du wiederum den Faktor 2 berücksichtigen. Das macht in Summe für unser vereinfachtes Modell bei angezogenen Armen eine Drehmasse von rund 1 kgm². Das entspricht der Drehmasse, die ein einziges Kilogramm in einem Abstand von 1 m zur Rotationsachse hat!
Nun berechnen wir die Drehmasse des ausgestreckten Arms. Nach dem Satz von Steiner beträgt dies $(1/3)me^2$

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

+ mb^2. Addiert man die Drehmasse der beiden ausgestreckten Arme zur Drehmasse für Rumpf, Kopf und Beine, erhält man rund 2,2 kgm², und das entspricht ziemlich genau einer Verdopplung der Drehmasse, wie das in Abb. 11.15 angegeben ist.

Hilfe zu A7: Ein Lichtjahr entspricht einer Entfernung von $3 \cdot 10^8$ m/s·60·60·24·365 s = $9{,}3 \cdot 10^{15}$ m. 25.000 LJ sind daher $2{,}3 \cdot 10^{20}$ m. Der Umfang der Kreisbahn ums galaktische Zentrum ist daher $1{,}5 \cdot 10^{21}$ m. Bei einer Geschwindigkeit von 220 km/s (= $6{,}8 \cdot 10^{12}$ m pro Jahr) braucht die Sonne daher etwa $216 \cdot 10^6$ Jahre (216 Millionen Jahre) für einen vollen Umlauf. Wenn wir annehmen, dass es unsere Erde seit etwa 4,6 Milliarden Jahren gibt, dann hat sie in dieser Zeit rund 21 Umläufe absolviert.

Hilfe zu A8: Nein. Arbeit ist Kraft in Wegrichtung mal Weg. F und s zeigen also in dieselbe Richtung. Beim Drehmoment stehen aber die Kraft und der Radius r im rechten Winkel aufeinander.

Hilfe zu A9 a: Das Drehmoment ist definiert als $M = Fr$. Das bedeutet umgekehrt, dass an einem Kraftarm r eine tangentiale Kraft von $F = M/r$ ausgeübt werden kann. Arbeit ist allgemein Kraft mal Weg. Bei einer Umdrehung ($2r\pi$) wird daher die Arbeit $W = 2r\pi F = 2\pi M$ verrichtet. Bei f Umdrehungen pro Sekunde ist die Arbeit pro Sekunde, also die Leistung $P = 2\pi Mf$.

Hilfe zu A9 b: $M = P/(2\pi f)$. 6400 U/min entsprechen rund 107 U/s, also 107 Hz. 882 kW sind $8{,}82 \cdot 10^5$ W. Wenn man nun die maximale Leistung einsetzt, erhält man für das Drehmoment 1312 Nm.

Wenn man umgekehrt aus dem maximalen Drehmoment die Leistung berechnet, kommt man auf $P = 2\pi \cdot 1500 \cdot (5000/60)$ W = 785000 W = 785 kW. Höchste Leistung und höchstes Drehmoment fallen also nicht zusammen. Es ist im Prinzip ist es bei allen Autos so, dass das maximale Drehmoment bei geringeren Umdrehungszahlen erreicht wird als die maximale Leistung.

Hilfe zu A10: Wenn nur das Brett auf der Waage liegt, wirken zwei Drehmomente. Zunächst das Drehmoment der Unterlage ($M_1 = F_1 \cdot r_1$; siehe Abb. 17 oben). Weil eine Gleichgewichtssituation vorliegt, muss dieses Drehmoment von der Waage ausgeglichen werden ($M_2 = F_2 \cdot r_2$). Da das Brett eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft ausübt, kann man an der Waage daher F_2 messen, nämlich die 300 N. Die Unterlage erzeugt daher ein Drehmoment von 300 N · 2 m = 600 Nm. Weil der Schwerpunkt der Unterlage bei 1 m liegt, hat diese daher ein Gewicht von 600 N.
Wenn sich nun die Person auf die Unterlage legt, wirken drei Drehmomente. Das bereits bekannte Drehmoment der Unterlage (M_1), das gegenrichtete Drehmoment der Waage (M_2) und das Drehmoment der Person (M_3). Weil diese im Gleichgewicht sind, gilt daher $F_1 \cdot r_1 + F_3 \cdot r_3 = F_2 \cdot r_2$. Wenn man alle bekannten Wert einsetzt, erhält man 600 Nm + 800 N·r_3 = 750·2 Nm· Daher ist r_3 = (1500 Nm – 600 Nm)/800 N = 1,125 m. Der KSP der Person befindet sich im Stehen daher bei 1 m und 12,5 cm.

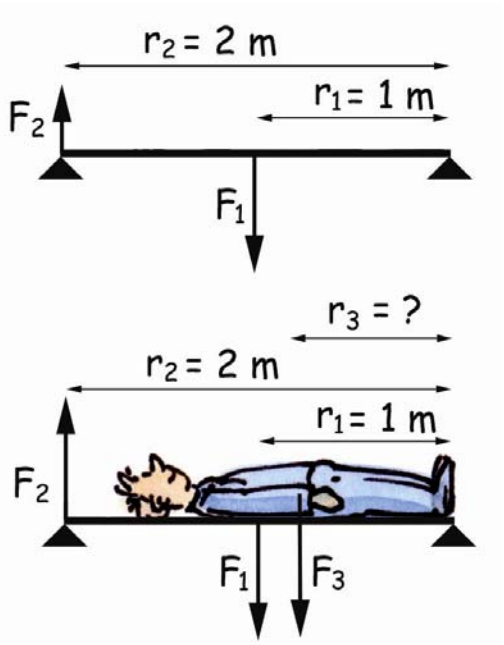

Abb. 18 (Grafik: Janosch Slama und Martin Apolin)

Hilfe zu A11: Die Erklärung liegt in der Erhaltung des Drehimpulses. Durch die Drehung der Bänder in der Kassette kam es zu einer Gegendrehung der gesamten Sonde. Das Bodenpersonal musste den Bordcomputer so umprogrammieren, dass gleichzeitig mit dem Ein- oder Ausschalten des Recorders ein kurzer Schub der Triebwerke ausgelöst wurde, der die Rotation ausglich.

Hilfe zu A12: Die Drehmasse der Erde beträgt $(2/5)mr^2$, also etwa $9{,}74 \cdot 10^{37}$ kgm². Wenn nun die Polkappen abschmelzen, dann erhöht sich die Drehmasse

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

der Erde um die Drehmasse einer Kugelschale mit 30 m Dicke. Das Volumen dieser Kugelschale ist das Volumen einer Kugel mit r = (Erdradius + Wasserhöhe) minus dem Volumen der jetzigen Erde und beträgt $1{,}53 \cdot 10^{16}$ m³. Eine andere Möglichkeit der Berechnung ist, die Oberfläche der Erde auszurechnen ($O = 4r^2\pi$) und dann mit der Wasserhöhe von 30 m zu multiplizieren. Man berechnet also quasi das Volumen eines Quaders mit der Grundfläche der Erdoberfläche. Auf Grund der geringen Krümmung der Erde kommt man dabei auf dasselbe Ergebnis.
Ein Kubikmeter Wasser hat eine Masse von 10^3 kg. Das Wasser hat daher in Summe eine Masse von $1{,}53 \cdot 10^{19}$ kg und eine Drehmasse von $2{,}48 \cdot 10^{32}$ kgm². Die Drehmasse der Erde erhöht sich daher um den Faktor 1,00000425. Die Zeitdauer für die Rotation und somit auch die Winkelgeschwindigkeit müssen um denselben Faktor absinken. Ein Tag dauert dann 86.400,37 s, also um etwa 0,4 Sekunden länger.

Drehmasse der Erde	$(2/5)mr^2 = 9{,}74 \cdot 10^{37}$ kgm² $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $r = 6{,}37 \cdot 10^{24}$ kg
Volumen und Masse der Kugelschale mit 30 m Höhe	$1{,}53 \cdot 10^{16}$ m³; $1{,}53 \cdot 10^{19}$ kg
Drehmasse der Kugelschale	$(2/3)m \cdot (r+30\text{ m})^2 = 4{,}14 \cdot 10^{32}$ kg
Verhältnis Drehmasse (Erde + Kugelschale) zu Drehmasse Erde	1,00000425

Tab. 5 zu A12

Hilfe zu A13: Das lässt sich ganz einfach mit der Drehimpulserhaltung erklären. Der Planet ist als Massenpunkt anzusehen und hat daher die Drehmasse mr^2, wobei r sein Abstand zur Sonne ist. Wenn sich dieser Abstand verringert, dann muss sich auf Grund der Drehimpulserhaltung die Winkelgeschwindigkeit vergrößern und umgekehrt.

Hilfe zu A14 a: Durch die Erddrehung liegen die Wasserbäuche nicht genau in einer Linie mit dem Mond, sondern gehen salopp gesagt „etwas vor". Das liegt daran, dass sie durch die Rotation der Erde etwas mitgezogen werden. Deshalb wird der Mond nicht exakt in Richtung Erdmittelpunkt angezogen, sondern in unserem Fall (Abb. 8) auch etwas nach links. Deswegen enthält die Erdanziehung auch eine Komponente, die den Mond in seiner Bahnrichtung vorwärts zieht. Das beschleunigt einerseits den Mond, bremst aber andererseits auch die Erde ab. Wenn sich die Erde irgendwann einmal so schnell dreht wie der Mond, dann liegen die Bäuche genau in einer Linie mit dem Mond, und die Beschleunigung verschwindet.

Hilfe zu A14 b: Das 3. Kepler'sche Gesetz lautet $r^3/T^2 = C$. Wenn du die bekannten Werte des Mondes einsetzt, erhältst du $(3{,}8 \cdot 10^8)^3/(27{,}3 \cdot 86400)^2$ m³/s² = $9{,}86 \cdot 10^{12}$ m³/s².

Hilfe zu A14 c: Die Winkelgeschwindigkeit ist definiert als $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$. Für einen vollen Umlauf (2π) benötigt der Mond die Zeit T. Daher gilt $\omega = 2\pi/T$ oder $T = 2\pi/\omega$.

Hilfe zu A14 d: Die Drehmasse der Erde beträgt $(2/5)mr^2$, also etwa $9{,}74 \cdot 10^{37}$ kgm². Ihre Winkelgeschwindigkeit beträgt $2\pi/86120$ s = $7{,}3 \cdot 10^{-5}$ s^{-1} (Anm.; eine volle Umdrehung ist etwas kürzer als ein Tag; siehe *Karussell Erde*, S. 107) und ihr Drehimpuls daher $7{,}11 \cdot 10^{33}$ Js. Den Mond kann man auf Grund seiner großen Entfernung als Massenpunkt annehmen. Er hat daher eine Drehmasse von $mr^2 = 1{,}05 \cdot 10^{40}$ kgm². Seine Winkelgeschwindigkeit beträgt $2\pi/(27{,}3 \cdot 86400)$ = $2{,}66 \cdot 10^{-6}$ s^{-1} und sein Drehimpuls daher $2{,}81 \cdot 10^{34}$ Js. Der Gesamtdrehimpuls von Erde und Mond ist somit $3{,}52 \cdot 10^{34}$ Js.

Hilfe zu A14 e: Der Mond entfernt sich so lange von der Erde, bis die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre eigene Achse und die des Mondes um die Erde gleich groß sind. Der Gesamt-Drehimpuls bleibt dabei erhalten. Daher gilt: $L_E + L_M = I_E \cdot \omega + I_M \cdot \omega = 3{,}52 \cdot 10^{34}$ Js. Während die Drehmasse der Erde gleich bleibt, vergrößert sich jedoch die des Mondes durch die Entfernung. Wenn wir den Drehimpuls der Erde vernachlässigen, erhalten wir $mr^2 \cdot \omega = L_M = 3{,}52 \cdot 10^{34}$ Js (dabei ist m die Mondmasse).
Nachdem r und ω zusammenhängen, lässt sich diese Gleichung noch nicht lösen. Abhilfe verschafft das 3. Kepler'sche Gesetz: $r^3/T^2 = C = 9{,}86 \cdot 10^{12}$ m³/s². Durch Umformen erhält man $r^3 = CT^2$ und $r^2 = C^{2/3}T^{4/3}$. Weiters gilt $\omega = 2\pi/T$ und $T = 2\pi/\omega$.
Nun gehen wir vom Gesamtdrehimpuls aus: $mr^2 \cdot \omega = L_M$. Wir ersetzen ω und erhalten $L_M = (mr^2 2\pi)/T$. Nun ersetzen wir r^2 durch den Ausdruck oben und erhalten $L_M = (2\pi m C^{2/3} T^{4/3})/T = 2\pi m C^{2/3} T^{1/3}$. Wenn wir nach T

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

auflösen, erhalten wir $T = (L_M/(2\pi m C^{2/3}))^3$. Wenn du nun einsetzt, erhältst du für T 4,64·10⁶ s oder 53,7 heutige Erdtage. Der Mond befindet sich dann in der Entfernung $r = C^{1/3} T^{2/3}$ = 6·10⁸ m, das entspricht rund dem 1,6-fachen der heutigen Entfernung.

Mond und Erde: $r^3/T^2 = C$	9,86·10¹² m³/s²
Drehmasse der Erde	9,74·10³⁷ kgm²
Winkelgeschwindigkeit Erde	7,3·10⁻⁵ s⁻¹
Drehimpuls Erde	7,11·10³³ Js
Drehmasse Mond	1,05·10⁴⁰ kgm²
Winkelgeschwindigkeit Mond	2,66·10⁻⁶ s⁻¹
Drehimpuls Mond	2,81·10³⁴ Js
Drehimpuls Erde und Mond	3,52·10³⁴ Js

Tab. 6 zu A14

Hilfe zu A15: Die anfängliche potenzielle Energie wandelt sich in kinetische Translations- und Rotationsenergie um. Es gilt daher: $E_p = E_k + E_{rot}$ und daher $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$. Dabei ist v die Tangentialgeschwindigkeit, die wiederum identisch mit der Rollgeschwindigkeit ist. Daher kann man schreiben: $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2r^2} = v^2\left(\frac{m}{2} + \frac{I}{2r^2}\right)$. Die Drehmasse eines Vollzylinders ist $(mr^2)/2$. Wenn du einsetzt, erhältst du $mgh = v^2\left(\frac{m}{2} + \frac{mr^2}{4r^2}\right) = v^2\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{4}\right) = \frac{3mv^2}{4}$. Durch Umformen erhältst du $v_{voll} = \sqrt{\frac{4gh}{3}} \approx 1{,}15 \cdot \sqrt{gh}$. Die Drehmasse des Hohlzylinders ist mr^2. Durch Einsetzen erhältst du $mgh = v^2\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2}\right) = mv^2$ und somit $v_{hohl} = \sqrt{gh}$. Die Geschwindigkeit des Vollzylinders am tiefsten Punkte ist daher rund 15 % höher.

Hilfe zu A16 a: Es gilt $m = \rho \cdot V$. Das Volumen einer Kugel ist $V = (4r^3\pi)/3$ und beträgt bei einem Radius von 1 cm daher 4,2·10⁻⁶ m³. Für die Masse der Kugel ergeben sich daher 0,033 kg, also etwa 33 g.

b: Um die Aufprallgeschwindigkeit auszurechnen, nehmen wir an, dass die potenzielle Energie mgh vollständig in kinetische Energie $(mv^2)/2$ umgewandelt wird. Die Geschwindigkeit ist $v = \sqrt{2gh}$ und somit 4,34 m/s.

c: Dieses Beispiel ist analog zu A15. Die anfängliche potenzielle Energie der Kugel wandelt sich in kinetische Translations- und Rotationsenergie um. Es gilt daher: $E_p = E_k + E_{rot}$ und daher $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$. Dabei ist v die Tangentialgeschwindigkeit, die wiederum identisch mit der Rollgeschwindigkeit ist. Daher kann man schreiben: $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2r^2} = v^2\left(\frac{m}{2} + \frac{I}{2r^2}\right)$. Die Drehmasse einer Kugel ist $(2mr^2)/5$. Wenn du einsetzt, erhältst du $mgh = v^2\left(\frac{m}{2} + \frac{2mr^2}{10r^2}\right) = v^2\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{5}\right) = \frac{7mv^2}{10}$. Durch Umformen erhältst du $v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{\frac{5}{7}2gh} \approx 0{,}85 \cdot \sqrt{2gh}$. Am Fuße der Rampe ist die Rollgeschwindigkeit daher um etwa 15 % geringer und liegt bei 3,77 m/s.

Hilfe zu A17: Das rohe Ei ist schneller unten. Weil es innen noch flüssig ist, rotiert nicht die gesamte Masse. Daher nimmt es auch weniger Rotationsenergie auf, wodurch die Translationsenergie und somit auch die Geschwindigkeit größer sein muss (siehe A15). Andere Erklärung: Weil es innen flüssig ist und nicht die gesamte Masse rotiert, ist die Drehmasse des rohen Eies geringer. Daher setzt es sich bei gleichem Drehmoment schneller in Bewegung.

Hilfe zu A18 a: Die Zentripetalbeschleunigung ist $a_{zp} = v^2/r$. Der Umfang der Kreisbahn der ISS ist $U = 2r\pi$, wobei r Erdradius plus Höhe über der Erdoberfläche ist, also 6,72·10⁶ m. Wenn man einsetzt, erhält man für den Umfang 4,22·10⁷ m. Die Tangentialgeschwindigkeit beträgt daher 7733 m/s. Die dafür benötigte Zentripetalbeschleunigung beträgt wiederum 8,9 m/s². Diese entsteht ja durch die Gravitationskraft und sinkt mit der Entfernung von der Erdoberfläche ab. Deshalb war für a_{zp} ein Wert von kleiner als g (9,81 m/s²) zu erwarten.

Hilfe zu A18 b: Einerseits gilt für das Gewicht $F_G = mg$. Andererseits kannst du das Gewicht auch über $F_G = G\frac{mM}{r^2}$ berechnen. Durch Gleichsetzen und Umformen erhältst du eine Gleichung für g in Abhängigkeit des Abstandes zum Erdmittelpunkt: $g = \frac{GM}{r^2}$. Grafisch dargestellt sieht das so aus wie in Abb. 19. In einer Höhe von 350 km ist g auf 8,86 m/s² gesunken, um rund 10 %. Dieser Wert ist identisch mit der berechneten Zentripetalbeschleunigung aus A18 a. Die Schwerelosigkeit kommt natürlich durch den freien Fall zu Stande (siehe z.B. S. 72, Kap. 8.1, BB5).

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

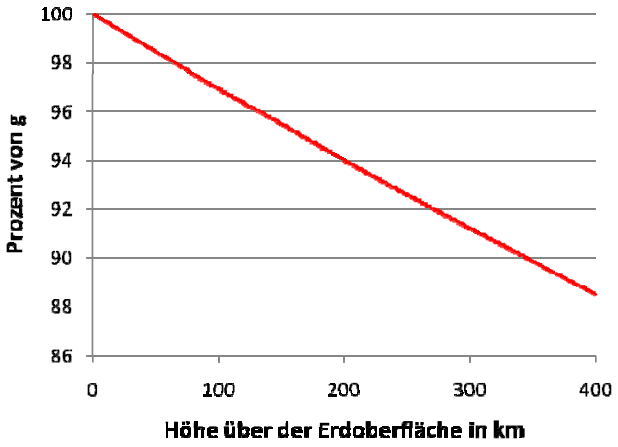

Abb. 19 zu A18

Hilfe zu A19 a: Die benötigte Zentripetalkraft für die Kurvenfahrt liefert die Reibung. Die Zentripetalkraft kann daher niemals größer sein als die Reibungskraft zwischen Reifen und Straße. Es muss also gelten: $F_{zp} \leq F_r$ oder $(mv^2)/r \leq \mu mg$. Die Masse kürzt sich weg - der Radius hängt also nicht von ihr ab, sondern nur von der Reibung. Wenn man nach r auflöst, erhält man $r \geq v^2/(\mu g)$. Setzt man für v 44,4 m/s, für μ 0,65 und für g 9,81 m/s² ein, erhält man einen Mindestkurvenradius von 309 m.

Hilfe zu A19 b: Bei einer Kurvenfahrt muss das Lenkrad gedreht werden, um das Fahrzeug in den Bogen einzulenken. Bei konstanter Fahrgeschwindigkeit und gleichmäßiger Änderung des Lenkeinschlages bewegt sich das Fahrzeug auf einer Linie, die näherungsweise einer Klothoide entspricht. Würde die Kurve quasi ansatzlos beginnen, müsste man ruckartig einlenken, wenn man nicht an der Rand der Fahrbahn gelangen will. Klothoiden dienen daher der Fahrsicherheit.

Hilfe zu A20 a: Durch Gleichsetzung der allgemeinen Gewichtsformel mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz erhält man —— und somit ——. Am Pol wirkt nur die Schwerkraft. Mit den bekannten Werten ergibt sich für g daher 9,867 m/s². Am Äquator wirkt aber zusätzlich die Zentrifugalbeschleunigung $a_{zp} = v^2/r = \omega^2 r$ gegen die Gravitationsbeschleunigung g_{grav}. g ist daher $g_{grav} - a_{zp}$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde beträgt $2\pi/86120$ s = $7{,}3 \cdot 10^{-5}$ s^{-1} (Anm.: Eine volle Umdrehung ist etwas kürzer als ein Tag; siehe *Karussell Erde*, S. 107). Für die Zentrifugalbeschleunigung am Äquator ergibt sich daher 0,034 m/s² und für g somit 9,767 m/s². Die gemessenen Werte liegen bei 9,832 m/s² am Pol (Abweichung 3,5 %) und 9,780 m/s² am Äquator (Abweichung 1,3 %).

Hilfe zu A20 b: Aus der Sicht eines nichtrotierenden Beobachters wirkt auf einen Punkt auf der Erdoberfläche eine Zentripetalbeschleunigung von 0,034 m/s². Der Boden wird mit diesem Wert von den Füßen weg beschleunigt. Daher muss man ihn von g_{grav} abziehen und kommt zum selben Ergebnis.

Hilfe zu A21 a: Es gilt $a_{zp} = g = \omega^2 r$. Daraus folgt - . Nachdem ein Radiant etwa 57,3 ° sind, rotiert die Raumstation also mit etwa 19 °/s. Für die Tangentialgeschwindigkeit ergeben sich daher $v = \omega r$ = 30 m/s oder 108 km/h. Die künstliche Gravitation zeigt genau nach außen. Die Köpfe der Insassen würden daher in die Mitte zeigen.

Hilfe zu A21 b: Wenn die Sprinter mit der Rotationsgeschwindigkeit laufen, ist ihre Tangentialgeschwindigkeit 40 m/s. Daher erhöht sich die künstliche Schwerebeschleunigung auf $v^2/r \approx$ 17,8 m/s² – die Sprinter werden also um 78 % „schwerer". Wenn sie gegen die Rotation laufen, beträgt die künstliche Schwerebeschleunigung nur mehr rund 4,4 m/s², sie würden also um 66 % leichter.
Zusätzlich kommt aber noch ein Effekt in den Beinen dazu. Das liegt daran, dass die Füße beim Laufen etwa die Hälfte der Zeit ruhig am Boden sind (Stützphase), in der Schwungphase daher im Schnitt aber die doppelte Geschwindigkeit besitzen. Laufen die Sprinter in Bewegungsrichtung, so haben die Füße relativ zum Boden 20 m/s, das macht also eine künstliche Schwerebeschleunigung von $(50 \text{ m/s})^2/r \approx$ 27,8 m/s² - beinahe eine Verdreifachung. Beim Lauf gegen die Richtung wäre die künstliche Schwerebeschleunigung in der Schwungphase $(10 \text{ m/s})^2/r \approx$ 1,1 m/s². Die Füße wären beinahe schwerelos. Kurz: Bei den Füßen ist der Effekt des Schwerer- oder Leichter-Werdens wesentlich ausgeprägter.

Hilfe zu A22: Blickt man längere Zeit auf den Sternhimmel, so drehen sich die Sterne scheinbar. Nur zwei Punkte, genau über den Polen der Erde, sind immer in Ruhe. Man sieht (Abb. 15), dass sich selbst der Polarstern etwas bewegt hat. Warum? Weil er nicht exakt im

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

Norden steht, sondern etwa 0,8° vom Himmelsnordpol entfernt. Momentan! Denn durch die Präzession der Erdachse wandern die Himmelspole. Wodurch wird diese Präzession hervorgerufen? Die Ursache liegt darin, dass die Erde durch ihre Eigenrotation etwas abgeplattet ist. Der Äquatordurchmesser ist um 0,3 % oder 43 km größer als der Poldurchmesser (siehe A20 a). Außerdem ist die Erdachse um etwa 66,5° gegen die Erdbahnebene geneigt (bzw. um 23,5° gegen die Senkrechte). Die Erde ist daher von Sonne und Mond aus gesehen nicht symmetrisch, und beide zerren am Äquatorwulst. Ohne Drehung würde sich dadurch die Erdachse aufrichten. Die Erde ist aber ein riesiger Kreisel. Die Achse richtet sich daher nicht auf, sondern weicht diesem Drehmoment in Rotationsrichtung rechtwinkelig aus und vollführt eine Präzessionsbewegung. Sehr gemächlich allerdings: Ein voller Umlauf der Erdachse dauert nämlich 25.850 Jahre. Diese Zeitdauer nennt man auch Platonisches Jahr.
In künftiger Zeit werden daher andere „Polarsterne" eine Rolle spielen, weil die Verlängerung der Erdachse über den Himmel wandert (siehe Abb. 20). Im Jahre 9.300 n. Chr. wird der Himmelsnordpol in der Nähe des Sterns Deneb im Schwan sein und etwa im Jahre 13.000 n. Chr. bei Wega im Sternbild Leier. Allerdings wird keiner dieser Sterne je so eng an den Himmelspol herankommen wie unser heutiger Polarstern.

Abb. 20: Die Wanderung des scheinbaren Himmelsnordpols im Laufe von rund 26.000 Jahren. Erst dann wird wieder der Polarstern seinem Namen gerecht (Grafik: Janosch Slama).

Hilfe zu A23: Der Kreisel weicht der Bewegung durch eine Präzessionsbewegung aus. Die Achse des Kreisels dreht sich daher nicht in der Buchebene, sondern sie dreht sich aus der Buchebene heraus (Abb. 21 III). Wie weit wird sich die Kreiselachse drehen? So weit, bis diese in Nord-Süd-Richtung steht. Warum? Weil dann nämlich die Achse des Kreisels nur mehr parallel verschoben, aber nicht mehr gedreht wird, und deshalb keine Präzessionsbewegung mehr auftritt. Was ist eine Achse, die immer in Nord-Süd-Richtung zeigt? Ein Kompass! Ein rotierender Kreisel ist daher ein Kreiselkompass, der den Vorteil hat, nicht durch Magnetfelder beeinflusst zu werden.

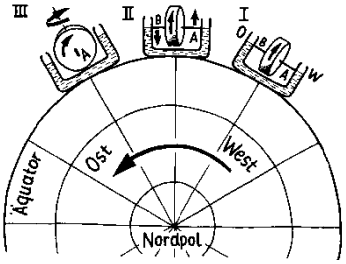

Abb. 21 (Grafik: Janosch Slama).

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 6 | ISBN: 978-3-209-04868-4
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.