Lösungswege 6 – Online **Vertiefung**

Thema: Rechenregeln für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten		**Grundkompetenz:**
Name:	**Schwierigkeitsgrad:**	**Klasse:**

Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (2) $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Beweise:

(1)

1. Fall: $m \in \mathbb{Z}^+$ und $n \in \mathbb{Z}^+$

Es gelten dieselben Überlegungen wie für natürliche m und n, die größer als 0 sind.

2. Fall: $m \in \mathbb{Z}^-$ und $n \in \mathbb{Z}^-$

Setzt man $m = -x$ und $n = -y$ mit $x, y \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

$$a^m \cdot a^n = a^{-x} \cdot a^{-y} = \frac{1}{a^x} \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{1}{a^x \cdot a^y} = \frac{1}{a^{x+y}} = a^{-(x+y)} = a^{(-x)+(-y)} = a^{m+n}$$

3. Fall: $m \in \mathbb{Z}^-$ und $n \in \mathbb{Z}^-$

Setzt man $m = -x$ mit $x \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

$$a^m \cdot a^n = a^{-x} \cdot a^n = \frac{1}{a^x} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^x}$$

Es gilt für $n > x$: $a^m \cdot a^n = a^{n-x} = a^{-x+n} = a^{m+n}$

Es gilt für $n < x$ $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{x-n}} = a^{-x+n} = a^{m+n}$

Es gilt für $n = x$ $a^m \cdot a^n = 1 = a^0 = a^{-x+x} = a^{m+n}$

4. Fall: $m \in \mathbb{Z}^+$ und $n \in \mathbb{Z}^-$

Setzt man $n = -y$ mit $y \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-y} = a^m \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{a^m}{a^y}$$

Es gilt für $m > y$: $a^m \cdot a^n = a^{m-y} = a^{m+(-y)} = a^{m+n}$

Es gilt für $m < y$: $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{y-m}} = a^{m-y} = a^{m+(-y)} = a^{m+n}$

Es gilt für $m = y$ $a^m \cdot a^n = 1 = a^0 = a^{y-y} = a^{y+(-y)} = a^{m+n}$

5. Fall: m = 0

$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n}$

6. Fall: n = 0

$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n}$

(2)

1. Fall: m ∈ $\mathbb{Z}^+$ und n ∈ $\mathbb{Z}^+$

Für m > n gelten dieselben Überlegungen wie für natürliche m und n, die größer als 0 sind.

Für m < n gilt: $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$

2. Fall: m ∈ $\mathbb{Z}^-$ und n ∈ $\mathbb{Z}^-$

Setzt man m = –x und n = –y mit x, y ∈ $\mathbb{Z}^+$ gilt:

$a^m : a^n = \frac{a^{-x}}{a^{-y}} = \frac{a^y}{a^x}$

Für y > x gilt: $a^m : a^n = a^{y-x} = a^{-x+y} = a^{(-x)-(-y)} = a^{m-n}$

Für y < x gilt: $a^m : a^n = \frac{1}{a^{x-y}} = a^{-(x-y)} = a^{-x+y} = a^{(-x)-(-y)} = a^{m-n}$

Für y = x gilt: $a^m : a^n = 1 = a^0 = a^{(-x)-(-x)} = a^{m-n}$

3. Fall: m ∈ $\mathbb{Z}^-$ und n ∈ $\mathbb{Z}^+$

Setzt man m = –x mit x ∈ $\mathbb{Z}^+$ gilt:

$a^m : a^n = \frac{a^{-x}}{a^n} = \frac{1}{a^x \cdot a^n} = \frac{1}{a^{x+n}} = a^{-x-n} = a^{m-n}$

4. Fall: m ∈ $\mathbb{Z}^+$ und n ∈ $\mathbb{Z}^+$

Setzt man n = –y mit y ∈ $\mathbb{Z}^+$ gilt:

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^{-y}} = a^m \cdot a^y = a^{m+y} = a^{m-(-y)} = a^{m-n}$

5. Fall: m = 0 und n ∈ $\mathbb{Z}^+$

$a^m : a^n = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} = 1 \cdot a^{-n} = a^0 \cdot a^{-n} = a^{0-n} = a^{m-n}$

6. Fall: m = 0 und n ∈ $\mathbb{Z}^-$

Setzt man n = – y mit y ∈ $\mathbb{Z}^+$ gilt:

$a^m : a^n = \frac{a^0}{a^{-y}} = \frac{1}{a^{-y}} = 1 \cdot a^y = a^0 \cdot a^y = a^{0+y} = a^{0-(-y)} = a^{m-n}$

7. Fall: n = 0

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^0} = \frac{a^m}{1} = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^{m-0} = a^{m-n}$

(3)

1. Fall: m ∈ $\mathbb{Z}^+$ und n ∈ $\mathbb{Z}^+$

Es gelten dieselben Überlegungen wie für natürliche m und n, die größer als 0 sind.

2. Fall: m ∈ $\mathbb{Z}^-$ und n ∈ $\mathbb{Z}^-$

Setzt man m = –x und n = –y mit x, y ∈ $\mathbb{Z}^+$ gilt:

$(a^m)^n = (a^{-x})^{-y} = \left(\frac{1}{a^x}\right)^{-y} = (a^x)^y = a^{xy} = a^{(-x)(-y)} = a^{m \cdot n}$

3. Fall: m ∈ $\mathbb{Z}^-$ und n∈ $\mathbb{Z}^+$

Setzt man m = –x mit x ∈ $\mathbb{Z}^+$ gilt:

$(a^m)^n = (a^{-x})^n = \left(\frac{1}{a^x}\right)^n = \frac{1}{a^{x \cdot n}} = a^{(-x)n} = a^{mn}$

4. Fall: m ∈ $\mathbb{Z}^+$ und n ∈ $\mathbb{Z}^-$

Setzt man n = –y mit y ∈ $\mathbb{Z}^+$ gilt:

$(a^m)^n = (a^m)^{-y} = \frac{1}{(a^m)^y} = \frac{1}{a^{m \cdot y}} = a^{m(-y)} = a^{mn}$

5. Fall: m = 0

$(a^m)^n = (a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0n} = a^{mn}$

6. Fall: n = 0

$(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m0} = a^{mn}$