Irrationale Zahlen

Viele Wurzeln sind keine rationalen Zahlen. Zum Beispiel gilt:

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Das können wir uns so überlegen:
Wenn die Wurzel aus 2 eine rationale Zahl wäre, dann könnten wir $\sqrt{2}$ als Quotient zweier natürlicher Zahlen a und b schreiben. Wir können annehmen, dass nicht beide Zahlen gerade sind, sonst könnten wir die Bruchzahl $\frac{a}{b}$ kürzen.

Wir überlegen uns zuerst, dass dann a eine gerade Zahl sein muss:
Wegen

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \text{ ist } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2, \text{ also } a^2 = 2b^2.$$

Also ist a^2 eine gerade Zahl. Wäre a eine ungerade Zahl, dann wäre auch a^2 ungerade, also muss a gerade sein.

Nun überlegen wir uns, dass dann auch b eine gerade Zahl sein muss: Wenn a gerade ist, kann a als Produkt 2c geschrieben werden, wobei c eine natürliche Zahl ist. Dann ist aber

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2 \quad \text{und} \quad b^2 = 2c^2.$$

Folglich ist b^2 und damit auch b gerade. Das widerspricht unserer Annahme, dass nicht beide Zahlen a und b gerade sind.

Daher können wir $\sqrt{2}$ nicht wie angenommen als Quotient zweier natürlicher Zahlen anschreiben, also ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl (und insbesondere keine Dezimalzahl).

Autorin und Autoren: Franz Pauer, Martina Scheirer-Weindorfer, Andreas Simon