

12 GERADEN IN \mathbb{R}^2

- W 12.01** Was versteht man unter einer Parameterdarstellung einer Geraden in \mathbb{R}^2 ?
- W 12.02** Eine Gerade in \mathbb{R}^2 sei durch die Parameterdarstellung $X = P + t \cdot \vec{PQ}$ gegeben. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Punkten der Geraden und den reellen Zahlen t ? Welchen Parameterwert hat P bzw. Q ?
- W 12.03** Wie viele Parameterdarstellungen kann eine Gerade in \mathbb{R}^2 haben? Begründe!
- W 12.04** Wie kann man eine Parameterdarstellung vereinfachen? Begründe die Vorgehensweise!
- W 12.05** Kann ein Punkt P auf einer Geraden g bei zwei verschiedenen Parameterdarstellungen von g den gleichen Parameterwert haben? Begründe!
- W 12.06** Kann ein Punkt P auf einer Geraden g bei zwei verschiedenen Parameterdarstellungen von g verschiedene Parameterwerte haben? Begründe!
- W 12.07** Kann eine Gerade g sowohl eine Parameterdarstellung der Form $X = P + t \cdot \vec{g}$ (mit $P \neq O$) als auch der Form $X = t \cdot \vec{g}$ haben? Erläutere die Antwort an einem Beispiel!
- W 12.08** Gegeben sei die Gerade g durch den Punkt P mit dem Normalvektor \vec{n} . Wie kann man eine Gleichung der Geraden g finden?
- W 12.09** Eine Gerade habe die Gleichung $n_1x + n_2y = c$. Wie kann man einen Normalvektor der Geraden finden? Wie kann man einen Punkt der Geraden finden?
- W 12.10** Eine Gerade g sei durch eine Parameterdarstellung gegeben. Wie kann man feststellen, ob ein vorgegebener Punkt A auf g liegt?
- W 12.11** Eine Gerade g sei durch eine Gleichung gegeben. Wie kann man feststellen, ob ein vorgegebener Punkt A auf g liegt?
- W 12.12** Gegeben sei eine Gerade g in Parameterdarstellung. Erläutere, wie man eine Parameterdarstellung einer Parallelen zu g durch einen vorgegebenen Punkt P erhält!
- W 12.13** Gegeben sei eine Gerade g in Parameterdarstellung. Erläutere, wie man eine Parameterdarstellung einer Normalen zu g durch einen vorgegebenen Punkt P erhält!
- W 12.14** Wie kann man eine Gleichung einer Geraden finden, die zwei vorgegebene Punkte enthält?
- W 12.15** Wie kann man eine Gleichung einer Geraden finden, die durch einen vorgegebenen Punkt verläuft und zu einer gegebenen Geraden parallel ist?
- W 12.16** Wie kann man eine Gleichung einer Geraden finden, die durch einen vorgegebenen Punkt verläuft und zu einer gegebenen Geraden normal ist?
- W 12.17** Zwei Geraden g und h seien durch Parameterdarstellungen gegeben. Wie kann man die gegenseitige Lage von g und h erkennen und gegebenenfalls den Schnittpunkt ermitteln?
- W 12.18** Zwei Geraden g und h seien durch eine Gleichung gegeben. Wie kann man die gegenseitige Lage von g und h erkennen und gegebenenfalls den Schnittpunkt ermitteln?



12 GERADEN IN \mathbb{R}^2 Lösungen

- W 12.01 Die Vektorgleichung $X = P + t \cdot \vec{g}$ nennt man eine Parameterdarstellung der Geraden g mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$. Dabei ist \vec{g} ein Richtungsvektor von g .
- W 12.02 Jedem Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ entspricht genau ein Punkt auf der Geraden und umgekehrt. Wenn t ganz \mathbb{R} durchläuft, durchläuft X (laufender Punkt) die ganze Gerade. $P: t=0$, $Q: t=1$
- W 12.03 Eine Gerade g kann unendlich viele Parameterdarstellungen haben, weil man den festen Punkt P und den Richtungsvektor \vec{g} auf unendlich viele Arten wählen kann.
- W 12.04 Man darf eine Parameterdarstellung $X = P + t \cdot \vec{g}$ einer Geraden vereinfachen, indem man ein geeignetes Vielfaches des Richtungsvektors \vec{g} nimmt. Denn auf die Länge des Richtungsvektors \vec{g} kommt es nicht an. Mit dem festen Punkt P darf man dies im Allgemeinen nicht machen.
- W 12.05 Ja. Ist zB $P = (1 | -1)$ und $g: X = (5 | 1) + t \cdot (-2 | -1)$ mit $t=2$, ist $P \in g$. Eine andere Darstellung von g ist beispielsweise $X = (-7 | -5) + t \cdot (4 | 2)$ mit $t=2$, hier ist ebenfalls $P \in g$.
- W 12.06 Ja. ZB stellen die Parameterdarstellungen $X = (5 | 1) + t \cdot (-2 | -1)$ und $X = (-3 | -3) + t \cdot (2 | 1)$ dieselbe Gerade dar. In beiden Fällen besitzt der Punkt $P = (1 | -1)$ den Parameter $t=2$.
- W 12.07 Ja, das ist möglich, zB: $X = (5 | 1) + t \cdot (5 | 1)$ und $X = t \cdot (5 | 1)$.
- W 12.08 Es sind $\vec{n} = (n_1 | n_2)$, $X = (x | y)$ und $P = (p_1 | p_2)$. Dann kann eine Gleichung für g entweder durch $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$ oder durch $n_1 x + n_2 y = n_1 p_1 + n_2 p_2$ angeschrieben werden.
- W 12.09 Es ist $\vec{n} = (n_1 | n_2)$. Einen Punkt findet man zum Beispiel dadurch, dass man einen Wert für x wählt und den dazugehörigen Wert für y aus der Gleichung ausrechnet.
- W 12.10 Ein Punkt A liegt genau dann auf $g: X = P + t \cdot \vec{g}$, wenn $\vec{PA} \parallel \vec{g}$ ist.
- W 12.11 Ein Punkt A liegt genau dann auf $g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$, wenn $\vec{n} \cdot A = \vec{n} \cdot P$, dh., wenn die Koordinaten von A die Gleichung erfüllen.
- W 12.12 Man nimmt P als festen Punkt und als Richtungsvektor einen Richtungsvektor von g .
- W 12.13 Man nimmt P als festen Punkt und als Richtungsvektor einen Normalvektor von g .
- W 12.14 Seien P und Q die vorgegebenen Punkte. Man ermittelt den Vektor \vec{PQ} und einen dazugehörigen Normalvektor \vec{n} . Eine Gleichung der Geraden lautet dann $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$.
- W 12.15 Man ermittelt einen Normalvektor \vec{n} der gegebenen Geraden. Dieser ist auch Normalvektor der gesuchten Parallelen. Eine Gleichung der Parallelen lautet dann $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$.
- W 12.16 Ein Richtungsvektor der gegebenen Geraden ist ein Normalvektor \vec{n} der gesuchten Normalen. Eine Gleichung der Normalen lautet dann $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$.
- W 12.17 Sei $g: X = P + s \cdot \vec{g}$ und $h: X = Q + t \cdot \vec{h}$
 $\vec{g} \parallel \vec{h} \Rightarrow g$ und h schneiden einander.
 Gleichsetzen der beiden rechten Seiten liefert ein lineares Gleichungssystem in s und t .
 Durch Einsetzen der Lösungen in die Parameterdarstellungen erhält man den Schnittpunkt von g und h .
 $\vec{g} \parallel \vec{h} \wedge \vec{PQ} \parallel \vec{g} \Rightarrow g$ und h sind parallel und verschieden.
 $\vec{g} \parallel \vec{h} \wedge \vec{PQ} \parallel \vec{g} \Rightarrow g$ und h fallen zusammen.
- W 12.18 Sei $g: a_1 x + a_2 y = a_0$ und $h: b_1 x + b_2 y = b_0$.
 $b_1 = r \cdot a_1 \wedge b_2 = r \cdot a_2 \Rightarrow g$ und h schneiden einander.
 Den Schnittpunkt $(x | y)$ erhält man durch Lösen des Gleichungssystems, das aus den beiden Geradengleichungen besteht.
 $b_1 = r \cdot a_1 \wedge b_2 = r \cdot a_2 \wedge b_0 \neq r \cdot a_0 \Rightarrow g$ und h sind parallel und verschieden.
 $b_1 = r \cdot a_1 \wedge b_2 = r \cdot a_2 \wedge b_0 = r \cdot a_0 \Rightarrow g$ und h fallen zusammen.

