Lösung Aufgabe 257

a)

1) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Würfel ein bestimmtes Symbol zeigt, ist $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf alle fünf Würfel dasselbe Symbol zeigen, ist $\left(\frac{1}{6}\right)^5$.
Da es sechs Möglichkeiten gibt, ein „Grande" zu würfeln (sechs verschiedene Symbole), erhöht sich diese Wahrscheinlichkeit auf das Sechsfache.
Die Wahrscheinlichkeit für ein „Grande" beträgt also $6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296} \approx 0{,}0007716.$

b)

1) Die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten vier Würfel „Asse" zeigen und der letzte Würfel nicht, ist $\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{5}{6}$. Nun könnte der Würfel, der kein „Ass" zeigt, auch an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle vorkommen, was insgesamt fünf Möglichkeiten für einen „Poker" mit vier „Assen" ergibt.
Die Wahrscheinlichkeit, einen „Poker" mit vier „Assen" zu werfen, ist also insgesamt
$5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{5}{6} \approx 0{,}003215$.

2) Der Ausdruck $\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1$, den Marlene aufgeschrieben hat, muss angepasst werden, damit er die allgemeine Wahrscheinlichkeit für einen „Poker" angibt.
Zunächst gibt es fünf Möglichkeiten für einen „Poker" mit einem bestimmten Symbol (z. B. vier „Neuner"). Der eine Würfel, der keine „Neun" zeigt, kann nämlich an fünf verschiedenen Stellen auftreten. Marlenes Ausdruck muss also mit 5 multipliziert werden.
Natürlich kann ein „Poker" mit sechs verschiedenen Symbolen geworfen werden, wobei für jedes Symbol die Überlegung zutrifft, die oben mit der „Neun" angestellt wurde. Marlenes Ausdruck muss mit 6 multipliziert werden. Insgesamt ist k also $5 \cdot 6 = 30$.

c)

1) In der gegebenen Gleichung kommt auf der linken Seite der Ausdruck $P(X \geq 1)$ vor. Er bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass bei vielen Würfen mit einem Würfel mindestens ein „Ass" vorkommt. Man kann schreiben
$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots = 1 - P(X = 0)$.
Hier kommt nun der Ausdruck $P(X = 0)$ vor, der die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass bei einer bestimmten Anzahl n von Würfen kein „Ass" erscheint. Diese Wahrscheinlichkeit ist binomialverteilt und lässt sich entsprechend berechnen:
$P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$
Man erhält insgesamt $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Die gegebene Gleichung kommt also von der Berechnung von $P(X \geq 1)$ mit Hilfe der Binomialverteilung. In diesem Zusammenhang bedeutet n die Anzahl der Würfe, die nötig sind, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens ein „Ass" zu werfen, 0,95 ist.