LÖSUNG ZU 720:

a)
$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$

$x_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0}) = 1{,}5$

$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) \approx 1{,}41667$
$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{2}{x_2}) \approx 1{,}41422$
$x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + \frac{2}{x_3}) \approx 1{,}41421 \approx \sqrt{2}$

b)
Betrachte die Gleichung $f(x) = x^2 – a = 0$

Nach dem Näherungsverfahren von Newton gilt:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{a}{x_n})$

c)
Betrachte die Gleichung $f(x) = x^3 – a = 0$

Nach dem Näherungsverfahren von Newton gilt:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = x_n - \frac{x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{1}{3} \cdot (2x_n + \frac{a}{x_n^2})$