Herausfordernde Aufgaben zu Doppelbrüchen und Division zweier Brüche, S. 57

1. Vereinfache den Doppelbruch!

a. $\frac{5+\frac{3}{4}}{3-\frac{5}{8}} =$

b. $\frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{15}{4}}{1+\frac{3}{4}} =$

c. $\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}} =$

2. Vereinfache den Doppelbruch! Welche Bedingungen müssen gelten, damit der Nenner nicht null ist?

a. $\frac{\frac{3}{z+1}}{\frac{z-1}{9}} =$

b. $\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} =$

c. $\frac{1-\frac{1}{p^2}}{2+\frac{2}{p}} =$

d. $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} =$

3. In folgender Rechnung ist ein Fehler passiert:

$$\frac{\frac{x-2}{x+2}}{\frac{2}{x^2-4}} = \frac{x-2}{x+2} : \frac{2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{x+2} : \frac{2}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{\cancel{x+2}} \cdot \frac{\cancel{x+2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Erkläre, was falsch gemacht wurde und stelle richtig!

Division zweier Terme (Polynomdivision)

Man möchte zwei Terme, zB $12x^3 - 31x^2 + 20x$ und $3x - 4$ dividieren. Wie geht man vor?
Beim Dividieren durch Polynome gehen wir ähnlich vor wie beim Dividieren von Zahlen.
Wenn wir dividieren, führen wir einige Rechenschritte im Kopf aus und schreiben sie nicht auf (siehe Rechnung unten). Zum Beispiel rechnet man beim ersten Schritt:

$$\begin{array}{l}
7287 : 21 = 347 \\
-63\downarrow \\
\hline
98 \\
-84 \\
\hline
147 \\
-147 \\
\hline
00
\end{array}$$

1. 21 ist in 72 3-mal enthalten.
2. $3 \cdot 21 = 63$; $72 - 63 = 9$ (Rest)
3. Nächste Stelle 8 herab usw.

Dieses Verfahren wenden wir auch beim Dividieren durch Polynome an.

$$\begin{array}{lllll}
(12x^3 & - & 31x^2 & + & 20x) : (3x - 4) = 4x^2 - 5x \\
(\mp)\,12x^3 & (\pm) & 16x^2 & & \downarrow \\
\hline
0 & & -15x^2 & + & 20x \\
 & & (\pm)\,15x^2 & (\mp) & 20x \\
\hline
 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Gleichung für den Divisor:

$-4 + 3x = 0$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{3} \Rightarrow x \neq \frac{4}{3}$

Probe:

$$\begin{array}{l}
(4x^2 - 5x) \cdot (3x - 4) \\
\hline
12x^3 - 15x^2 \\
 - 16x^2 + 20x \\
\hline
\mathbf{12x^3 - 31x^2 + 20x}
\end{array}$$

1. Ordnen nach fallenden Potenzen.
2. $3x$ ist in $12x^3$ $4x^2$-mal enthalten.
3. $(3x - 4) \cdot 4x^2 = 12x^3 - 16x^2$
   So unter den Dividenden schreiben, dass gleiche Potenzen untereinanderstehen!
4. Von $-31x^2$ musst du $-16x^2$ abziehen!
   Das heißt: Rechenzeichen ändern und addieren!
   Als Rest bleibt zunächst: $-15x^2$
5. Nächste „Stelle" $+20x$ herab.
6. $3x$ ist in $-15x^2$ $-5x$-mal enthalten usw.
7. Probe durch Ausmultiplizieren.

4. Führe die Divisionen durch! Welche Bedingungen müssen die Variablen jeweils erfüllen? Führe jeweils die Multiplikationsprobe durch!

a) $(2p^2 + 8p + 8) : (2p + 4) =$

b) $(8p^2 + 26p + 15) : (2p + 5) =$

c) $(9p^2 + 9p + 2) : (3p + 2) =$

d) $(63p^2 + 63 + 130p) : (7p + 9) =$

5. Führe die Divisionen durch! Welche Bedingungen müssen die Variablen jeweils erfüllen?

a) $(10u^2 + 19uv + 6v^2) : (2u + 3v) =$

b) $(10u^2 - 21v^2 + 29uv) : (5u - 3v) =$

c) $(48u^2 + 50uv + 7v^2) : (8u + 7v) =$

d) $(-5u^2 + 44uv - 63v^2) : (u - 7v) =$

Lösungen

1. a. $\frac{46}{19}$ b. $\frac{3}{2}$ c. $\frac{13}{7}$

2. a. $\frac{27}{z^2-1}, z \neq \pm 1$ b. $\frac{x-1}{x+1}, x \neq 0, x \neq -1$

c. $\frac{p-1}{2p}, p \neq 0, p \neq -1$ d. $\frac{b-a}{b+a}, a, b \neq 0, b+a \neq 0$

3. Beim Dividieren durch einen Bruch muss mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert werden und dann lässt sich der Bruch nicht durch (x – 2) kürzen.
Richtigstellung:

$$\frac{\frac{x-2}{x+2}}{\frac{2}{x^2-4}} = \frac{x-2}{x+2} : \frac{2}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+2} : \frac{2}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{\cancel{x-2}}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{2} = \frac{(x-2)^2}{2}$$

4.

a. p + 2; $p \neq -2$; Probe: (p + 2) (2p + 4) = $2p^2$ + 8p + 8
b. 4p + 3;$p \neq -\frac{5}{2}$; Probe: (4p + 3) (2p + 5) = $8p^2$ + 26p + 15
c. 3p + 1; $p \neq \frac{2}{3}$; Probe: (3p + 1) (3p + 2) = $9p^2$ + 9p + 2
d. 9p + 7;$p \neq -\frac{9}{7}$; Probe: (9p + 7) (7p + 9) = $63p^2$ + 130p + 63

5.

a. 5u + 2v; 2u ≠ – 3v
b. 2u + 7v; 5u ≠ 3v
c. 6u + v; 8u ≠ – 7v
d. – 5u + 9v; u ≠ 7v