8 EXAKTIFIZIERUNG DER DIFFERENTIALRECHNUNG

W 8.01 Wie lauten die Grenzwertregeln?

W 8.02 Wann heißt eine reelle Funktion f **1)** an einer Stelle p stetig, **2)** an einer Stelle p unstetig, **3)** stetig, **4)** unstetig?

W 8.03 Gib mindestens drei Typen von Funktionen an, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig sind!

W 8.04 Beschreibe verschiedene Arten von Unstetigkeitsstellen anhand von Skizzen verschiedener Funktionsgraphen!

W 8.05 Wann heißt eine reelle Funktion f **1)** an einer Stelle p differenzierbar, **2)** differenzierbar?

W 8.06 Woran erkennt man im Allgemeinen am Graphen einer Funktion, dass die Funktion an einer Stelle nicht differenzierbar ist?

W 8.07 Gib eine Termdarstellung einer Funktion an, die an einer Stelle nicht differenzierbar ist und zeichne den Graphen dieser Funktion!

W 8.08 Wie hängen Differenzierbarkeit und Stetigkeit miteinander zusammen?

W 8.01 Es seien f: A → ℝ und g: A → ℝ reelle Funktionen. Falls die Grenzwerte existieren, gilt:

(1) $\lim\limits_{x\to p}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to p} f(x) + \lim\limits_{x\to p} g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to p}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to p} f(x) - \lim\limits_{x\to p} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to p}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to p} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} g(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to p} f(x)}{\lim\limits_{x\to p} g(x)}$ (sofern $g(x) \neq 0$ in einer Umgebung von p und $\lim\limits_{x\to p} g(x) \neq 0$)

Speziell gilt für einen konstanten Faktor c:

$\lim\limits_{x\to p}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x\to p} f(x)$

W 8.02 Eine reelle Funktion f: A → ℝ heißt

1) an der Stelle $p \in A$ stetig, wenn $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p)$ ist,

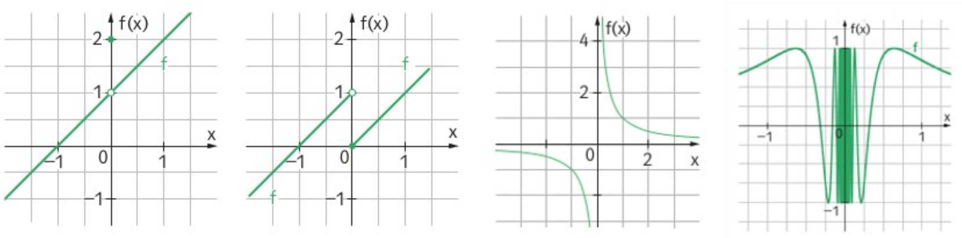
2) an der Stelle $p \in A$ unstetig, wenn $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ nicht existiert oder von f(p) verschieden ist,

3) stetig, wenn sie an jeder Stelle $p \in A$ stetig ist,

4) unstetig, wenn sie an mindestens einer Stelle $p \in A$ nicht stetig ist.

W 8.03 An jeder Stelle ihres Definitionsbereichs sind zB stetig: Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, Winkelfunktionen.

W 8.04 ZB:



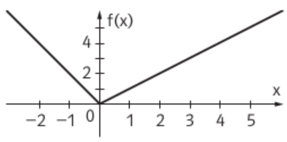
W 8.05 Eine reelle Funktion f: A → ℝ heißt

1) an der Stelle $p \in A$ differenzierbar, wenn $f'(p) = \lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ existiert.

2) differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle $p \in A$ differenzierbar ist.

W 8.06 Dass eine Funktion an einer Stelle nicht differenzierbar ist, erkennt man am Graphen daran, dass an der betrachteten Stelle die Tangente nicht gezeichnet werden kann, weil der Graph zB einen Knick besitzt oder die Funktion unstetig ist.

W 8.07 f: ℝ → ℝ mit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x<0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



W 8.08 Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit, aber nicht umgekehrt.