

5 BERECHNUNGEN IN BELIEBIGEN DREIECKEN

- W 5.01** Was versteht man unter Polarkoordinaten?
- W 5.02** Kann man jeden Punkt in einem Koordinatensystem mithilfe von Polarkoordinaten angeben? Begründe!
- W 5.03** Wie kann man kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten umrechnen und umgekehrt?
- W 5.04** Wie sind $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ und $\tan \varphi$ für alle mit $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ definiert? Welche Werte von φ muss man für $\tan \varphi$ ausnehmen und warum?
- W 5.05** Gib einige Beziehungen zwischen $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ und $\tan \varphi$ an, die zwar nur für $\varphi \in (0^\circ; 90^\circ)$ bewiesen worden sind, die sich aber für $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ)$ verallgemeinern lassen!
- W 5.06** Wie kann man den Sinus und den Cosinus im Einheitskreis darstellen? Erläutere dies anhand von Skizzen!
- W 5.07** Zwischen welchen Schranken liegen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ stets? Gilt dies auch für $\tan \varphi$?
- W 5.08** In welchen Quadranten liegen die Lösungen φ der Gleichung $\sin \varphi = c$, wenn $-1 < c < 0$, $0 < c < 1$ bzw. $c = 0$ ist?
- W 5.09** In welchen Quadranten liegen die Lösungen φ der Gleichung $\cos \varphi = c$, wenn $-1 < c < 0$, $0 < c < 1$ bzw. $c = 0$ ist?
- W 5.10** Es sei φ^* die Lösung der Gleichung $\sin \varphi = c$ (mit $0 < c < 1$) im ersten Quadranten. Wie lautet die zweite Lösung dieser Gleichung?
- W 5.11** Es sei φ^* die Lösung der Gleichung $\sin \varphi = c$ (mit $-1 < c < 0$) im vierten Quadranten. Wie lautet die zweite Lösung dieser Gleichung?
- W 5.12** Wie lautet die trigonometrische Flächeninhaltsformel für Dreiecke? Formuliere sie umgangssprachlich so in Worten, damit man sie sich leicht merken kann!
- W 5.13** Wie lautet der Sinussatz? In welchen Fällen kann man diesen in einem Dreieck anwenden?
- W 5.14** Wie lautet der Cosinussatz? In welchen Fällen kann man diesen in einem Dreieck anwenden?



W 5.01 Jeder von O verschiedene Punkt P kann durch Polarkoordinaten r und φ angegeben werden: $P = [r \mid \varphi]$. Dabei heißt $r = \overline{OP}$ der Polarabstand von P und φ das Polarwinkelmaß von P (gemessen im Gegenuhrzeigersinn von der positiven 1. Achse aus).

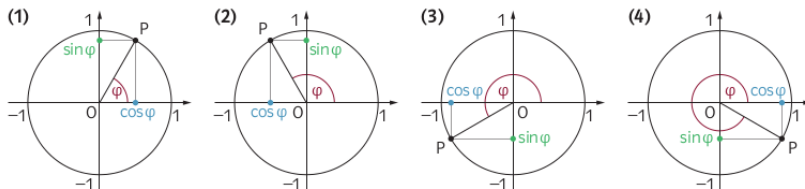
W 5.02 Nein, dem Ursprung O kann nämlich kein Polarwinkelmaß zugeordnet werden.

W 5.03 Es sei $P = (x \mid y) = [r \mid \varphi]$.
 Polarkoordinaten $\rightarrow$ kartesische Koordinaten: $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$
 kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Polarkoordinaten: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ (falls $x \neq 0$, dh. $\varphi \neq 90^\circ$ und $\varphi \neq 270^\circ$)

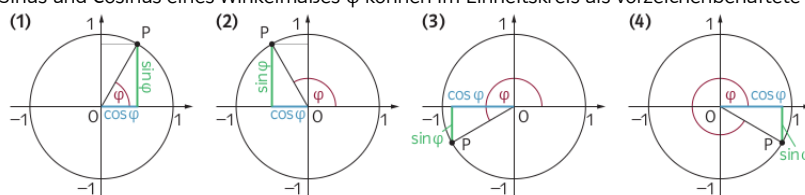
W 5.04 Für alle $P = (x \mid y) = [r \mid \varphi]$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ)$ gilt: $\sin \varphi = \frac{y}{r}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ (sofern $x \neq 0$, dh. $\varphi \neq 90^\circ$ und $\varphi \neq 270^\circ$).
 Es ist $\varphi \neq 90^\circ$ und $\varphi \neq 270^\circ$ vorauszusetzen, da andernfalls aufgrund von $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ eine Division durch 0 vorläge.

W 5.05 Für alle $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ)$ gilt: (1) $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, (2) $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ (sofern $\varphi \neq 90^\circ$ und $\varphi \neq 270^\circ$)

W 5.06 Sinus und Cosinus eines Winkelmaßes φ können im Einheitskreis als Stellen auf den Achsen dargestellt werden:



Sinus und Cosinus eines Winkelmaßes φ können im Einheitskreis als vorzeichenbehaftete Strecken dargestellt werden:



W 5.07 Für $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ gilt stets: $-1 \leq \sin \varphi \leq 1$ und $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$. Für $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ mit $\varphi \neq 90^\circ$ und $\varphi \neq 270^\circ$ kann $\tan \varphi$ jede beliebige reelle Zahl als Wert annehmen.

W 5.08 Für $-1 < c < 0$ hat die Gleichung $\sin \varphi = c$ genau eine Lösung in QIII und genau eine Lösung in QIV.
 Für $0 < c < 1$ hat die Gleichung $\sin \varphi = c$ genau eine Lösung in QI und genau eine Lösung in QII.
 Für $c = 0$ hat die Gleichung $\sin \varphi = c$ die beiden Lösungen 0° und 180° .

W 5.09 Für $-1 < c < 0$ hat die Gleichung $\cos \varphi = c$ genau eine Lösung in QII und genau eine Lösung in QIII.
 Für $0 < c < 1$ hat die Gleichung $\cos \varphi = c$ genau eine Lösung in QI und genau eine Lösung in QIV.
 Für $c = 0$ hat die Gleichung $\cos \varphi = c$ die beiden Lösungen 90° und 270° .

W 5.10 $180^\circ - \varphi^*$

W 5.11 $180^\circ + |\varphi^*|$

W 5.12 $A = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \gamma = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \sin \beta = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin \alpha$
 Flächeninhalt des Dreiecks = „Seite mal Seite halbe mal Sinus des eingeschlossenen Winkels“

W 5.13 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$; anwendbar auf den SSW-Fall und den SSW-Fall

W 5.14 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$; anwendbar auf den SWS-Fall und den SSS-Fall