7 FOLGEN

W 7.01 Gib ein Beispiel einer Folge an, die durch eine Termdarstellung gegeben ist!

W 7.02 Gib ein Beispiel einer Folge an, die rekursiv gegeben ist!

W 7.03 Gib ein Beispiel für eine streng monoton steigende Folge an! Begründe!

W 7.04 Gib ein Beispiel für eine streng monoton fallende Folge an! Begründe!

W 7.05 Gib ein Beispiel für eine beschränkte Folge an! Begründe!

W 7.06 Gib ein Beispiel für eine konvergente Folge an! Begründe!

W 7.07 Gib ein Beispiel für eine divergente Folge an! Begründe!

W 7.08 Gib drei Zahlenfolgen an, die den Grenzwert 1 haben, und beweise, dass 1 der Grenzwert ist!

W 7.09 Was versteht man unter einer arithmetischen Folge?
Eine solche Folge kann als Funktion aufgefasst werden. Von welchem Typ ist diese Funktion?
Was lässt sich über Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz der Folge aussagen?

W 7.10 Was versteht man unter einer geometrischen Folge?
Eine solche Folge kann als Funktion aufgefasst werden. Von welchem Typ ist diese Funktion?
Was lässt sich über Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz der Folge aussagen?

W 7.01 ZB: $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $a_n = 2 \cdot n + 1$

W 7.02 ZB: $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 2$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

W 7.03 ZB: $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 3$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, da wegen $a_{n+1} = a_n + 3$ stets $a_{n+1} > a_n$ gilt.

W 7.04 ZB: $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n \cdot 0{,}5$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, da wegen $a_{n+1} = a_n \cdot 0{,}5$ stets $a_{n+1} < a_n$ gilt.

W 7.05 ZB: $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $a_n = (-1)^n$, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq 1$

W 7.06 ZB: $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist konvergent mit dem Grenzwert 0.
Begründung: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.
Wählt man einen Index $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, dann ist $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

W 7.07 ZB: $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $a_n = n^2$, da sie nicht beschränkt ist.

W 7.08
- ZB: $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ mit $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ist konvergent mit dem Grenzwert 1.
  Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.
  Wählt man einen Index $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, dann ist $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
- ZB: $(b_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ mit $b_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ ist konvergent mit dem Grenzwert 1.
  Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $|b_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.
  Wählt man einen Index $n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, dann ist $|b_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
- ZB: $(c_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $c_n = 1$ ist konvergent mit dem Grenzwert 1.
  Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben.
  Wählt man einen Index $n_0 = 1$, dann ist $|c_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

W 7.09 Eine Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ nennt man arithmetische Folge, wenn die Differenz $a_{n-1} - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ den gleichen Wert k besitzt.
Die zugehörige Funktion ist von linearem Typ.
Arithmetische Folgen sind
- nur beschränkt, falls $k = 0$ ist,
- streng monoton steigend, falls $k > 0$ ist, und streng monoton fallend, falls $k < 0$ ist,
- nur konvergent, falls $k = 0$ ist.

W 7.10 Eine Folge $(b_n \mid n \in \mathbb{N})$, deren Glieder von 0 verschieden sind, nennt man geometrische Folge, wenn der Quotient $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ den gleichen Wert q besitzt. Die zugehörige Funktion ist eine Exponentialfunktion.
Geometrische Folgen sind
- nur beschränkt, falls $|q| \leq 1$ ist,
- streng monoton steigend, falls $q > 1$ ist, und streng monoton fallend, falls $0 < q < 1$ ist,
- nur konvergent, falls $-1 < q \leq 1$ gilt.