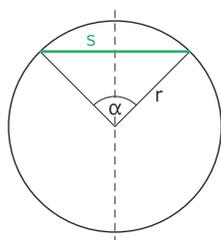


## HISTORISCHES ZUR TRIGONOMETRIE

Die Trigonometrie [griechisch: Dreiecksmessung] ist eine sehr alte mathematische Disziplin. Ihre ersten Spuren finden sich bei den **Babyloniern** (2000–200 v. Chr.) und den **Ägyptern** (2000–500 v. Chr.). Die Babylonier besaßen schon vereinzelt trigonometrische Tabellen und in dem ägyptischen *Papyrus Rhind* finden sich trigonometrische Überlegungen.

Die **Griechen** (**Hipparchos**, **Menelaos**, **Ptolemaios** u. a.) beschäftigten sich eingehend mit dem Problem, zu einem vorgegebenen Zentriwinkel  $\alpha$  eines Kreises die Länge  $s$  der dazugehörigen Sehne zu ermitteln:



Überlege selbst, dass die Sehnenlänge  $s$  aus dem Zentriwinkel  $\alpha$  mittels folgender Formel berechnet werden kann:

$$s = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

Dabei wurde der Radius meist in 60 gleich lange Teile geteilt, dh.  $r = 60$  gesetzt, wodurch sich die folgende Formel ergibt:

$$s = 120 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

Bis auf den konstanten Faktor 120 stimmt die so berechnete Sehnenlänge  $s$  mit dem Sinus des halben Zentriwinkels überein.

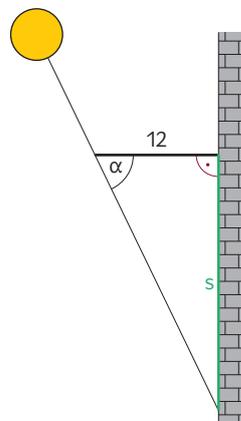
In dem astronomischen Werk *Almagest* des **Ptolemaios** (um 150 n. Chr.) findet sich eine Tafel, welche die Sehnenlänge  $s$  für Zentriwinkel  $\alpha$  von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  in Halbgradintervallen auflistet.

Lange Zeit war die Trigonometrie eng an die Astronomie gebunden. Dabei entwickelte sich nicht nur die **ebene Trigonometrie**, sondern auch die **sphärische Trigonometrie**, dh. die Trigonometrie auf der Kugeloberfläche (die wir in diesem Buch nicht behandeln).

Bedeutende Beiträge zur Trigonometrie im Rahmen der Astronomie wurden auch von den **Indern** (500–1400) geleistet. Die Inder verwendeten Tafeln für den Sinus, die auf der ptolemäischen Sehnentafel basierten. Von **Manjula** (um 930) wurden die Werte  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  sowie  $1 - \cos \alpha$  bereits in allen vier Quadranten verwendet. In dem Werk von **Varahamihira** (ca. 505–ca. 587) finden sich bereits verschiedene trigonometrische Formeln.

Die **Araber** (750–1400) führten das griechische Gedankengut weiter. Unter ihnen befanden sich bedeutende Astronomen, was sich ua. darin äußert, dass viele Sterne heute noch arabische Namen tragen (**Aldebaran**, **Vega**, **Rigel**, **Algor**, **Alcor**, **Mizar** usw.). Bei **Al-Habas** (auch **Al-Marwazi** genannt; ca. 770–ca. 870) und **Al-Zarqali** (ca. 1030–1100) finden sich Vorformen des Tangens und Cotangens (Kehrwert des Tangens).

**Al-Zarqali** betrachtet die Länge  $s$  des Schattens eines horizontalen Stabs auf eine vertikale Wand, wenn das Licht unter dem Winkel  $\alpha$  einfällt:



In Anlehnung an **Ptolemaios** teilt er den Stab in 12 gleich lange Teile, dh. er setzt die Stablänge gleich 12. Überlege selbst anhand der Abbildung, dass gilt:

$$s = 12 \cdot \tan \alpha$$

Bis auf den konstanten Faktor 12 stimmt also die Schattenlänge  $s$  mit dem Tangens von  $\alpha$  überein.





Aus „Erläuterung zum  
ptolemäischen Weltbild“  
von Georg von Peurbach  
und Regiomontanus



**Johannes Müller  
Regiomontanus**  
(1436–1476)

Die arabischen Mathematiker kannten schon verschiedene trigonometrische Beziehungen und lösten trigonometrische Gleichungen. Der Mathematiker **At-Tusi** (1201–1274) verfasste als Erster eine geschlossene Darstellung der Trigonometrie. (Dies geschah zwar schon in einer anonymen Handschrift aus dem 12. Jahrhundert, jedoch in wesentlich unvollkommenerer Form.) Nach und nach wurden auch die Tabellen verfeinert; in dem Tafelwerk von **Ulug Beg** (1394–1449) findet man trigonometrische Werte bereits auf 17 Nachkommastellen angegeben.

Die arabischen Erkenntnisse hatten großen Einfluss auf die weitere Entwicklung. Im 15. Jahrhundert wirkten an der **Universität Wien** drei Männer, die zur Verbreitung und Entwicklung der Trigonometrie wesentlich beigetragen haben:

- **Johannes von Gmunden** (vor 1385–1442)
- **Georg von Peurbach** (1423–1461)
- **Johannes Müller**, genannt **Regiomontanus** (lateinisch: der Königsberger; 1436–1476).

**Regiomontanus** verfasste die erste systematische europäische Darstellung der Trigonometrie, die unabhängig von der Astronomie gestaltet wurde. Von seiner fünfbändigen Schrift *De triangulis omnimodis* (um 1464) sind die ersten beiden Bände der ebenen Trigonometrie, die restlichen der sphärischen Trigonometrie (Trigonometrie auf der Kugel) gewidmet. Im zweiten Buch dieser Schrift findet sich der Sinussatz. Er verwendete in dieser Schrift nur Sinus und Cosinus, in einer späteren Schrift entwarf er jedoch auch eine Tangententabelle mit dezimaler Unterteilung (was damals ganz unüblich war).

Gegen Ende des 15. Jahrhunderts entstanden mehrere Darstellungen der Trigonometrie und Tafeln. Um 1600 tauchten auch die heute gebräuchlichen Namen Sinus, Cosinus und Tangens auf. Darüber hinaus wurden auch die Bezeichnungen Sekans (Kehrwert des Cosinus), Cosekans (Kehrwert des Sinus) und Cotangens (Kehrwert des Tangens) eingeführt. Diese Verhältnisse finden sich bis ins 20. Jahrhundert hinein, werden aber heute nur mehr äußerst selten verwendet, weil die Kehrwerte von Sinus, Cosinus und Tangens mit dem Taschenrechner leicht berechnet werden können.

Von den Mathematikern, die weitere wichtige Beiträge zur Trigonometrie leisteten, sind **Nikolaus Kopernikus** (1473–1543), **Christopher Clavius** (1537–1612), vor allem aber **Francois Viète (Vieta)** (1540–1603) zu nennen. In Vietas Schrift *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579) finden sich bereits umfassende trigonometrische Berechnungen an Dreiecken sowie auch verschiedene, zum Teil recht komplizierte trigonometrische Formeln, wie zB:

$$\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha$$
$$\sin \alpha = \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$$

Das Wort „Sinus“ entstand übrigens auf eine merkwürdige Weise. Der arabische Mathematiker **Aryabhata** nannte ihn *ardha-jya* (Halbsehne) oder auch *jya-ardha* (Sehnenhälfte). Dies wurde abgekürzt zu *jya* (Sehne). Daraus wurde später *jba*, welches die Araber kurz *jb* schrieben, da in der arabischen Schrift Selbstlaute nicht angeschrieben werden. Spätere Schreiber verwechselten dies mit *jaib*, was so viel wie Bucht oder Wölbung heißt. Dies wurde ins Lateinische mit *sinus* übersetzt.

